EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA
VOLUME 4

Análise Combinatória e Probabilidades

Manoel Benedito Rodrigues

Álvaro Zimmermann Aranha

Álvaro Zimmermann Aranha
Manoel Benedito Rodrigues

(Os Autores são Professores do Colégio Bandeirantes de São Paulo)

Exercícios de Matemática – vol. 4

Análise Combinatória e Probabilidade

Outras obras da Editora Policarpo:

Autores: Álvaro Zimmermann Aranha e Manoel Benedito Rodrigues

Coleção Exercícios de Matemática

Volume 1 – Revisão de 1º Grau
Volume 2 – Funções e Logaritmos
Volume 3 – Progressões Aritméticas e Geométricas
Volume 5 – Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares
Volume 6 – Geometria Plana
Volume 7 – Geometria no Espaço

Coleção Vestibulares:

Autores: Roberto Nasser e Marina Consolmagno
História nos Vestibulares
Autores: *Minchillo, Carlos A. Cortez et. alii*
Português nos Vestibulares
Autor: Gil Marcos Ferreira
Física nos Vestibulares
Autores: Aranha, Álvaro Z. et alii
Matemática nos Vestibulares Vol. 1 e 2

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Aranha, Álvaro Zimmermann, 1951-
Exercícios de matemática, vol. 4 : análise combinatória e probabilidade / Álvaro Zimmermann Aranha, Manoel Benedito Rodrigues. — São Paulo : Policarpo, 1997.

1. Matemática (1º grau) - Problemas, exercícios etc 2. Matemática (2º grau) - Problemas, exercícios etc I. Rodrigues, Manoel Benedito, 1948- II. Título.

97-5136 CDD-372.7076

Indices para catálogo sistemático:

1. Exercícios : Matemática : Ensino de 1º grau 372.7076

Editora Policarpo Ltda.
Rua Dr. Rafael de Barros, 185 – apto 12
São Paulo - SP
04003-041
✆ (011) 288-0895

Apresentação

Os livros da coleção **Exercícios de Matemática** apresentam forte intenção de oferecer aos estudantes de Matemática (do que é lecionado em 1º e 2º graus) uma numerosa e abrangente lista de exercícios, todos com resposta, que foram elaborados e colocados em ordem tal que resultasse num crescimento extremamente suave do seu grau de dificuldade, isto é, desde os muito simples até aqueles exercícios e problemas mais complexos.

Para facilitar a utilização deste livro por alunos e professores, cada capítulo é formado por Resumos Teóricos, Exercícios, Exercícios de Fixação e Exercícios Suplementares.

Na parte que chamamos Exercícios, estão aqueles iniciais e básicos que, normalmente, são resolvidos em sala de aula; os Exercícios de Fixação têm a finalidade de fazer com que o aluno adquira uma razoável prática nos diversos tópicos estudados; em seguida, os Exercícios Suplementares, geralmente mais sofisticados, visam ampliar e aprofundar os conhecimentos obtidos anteriormente.

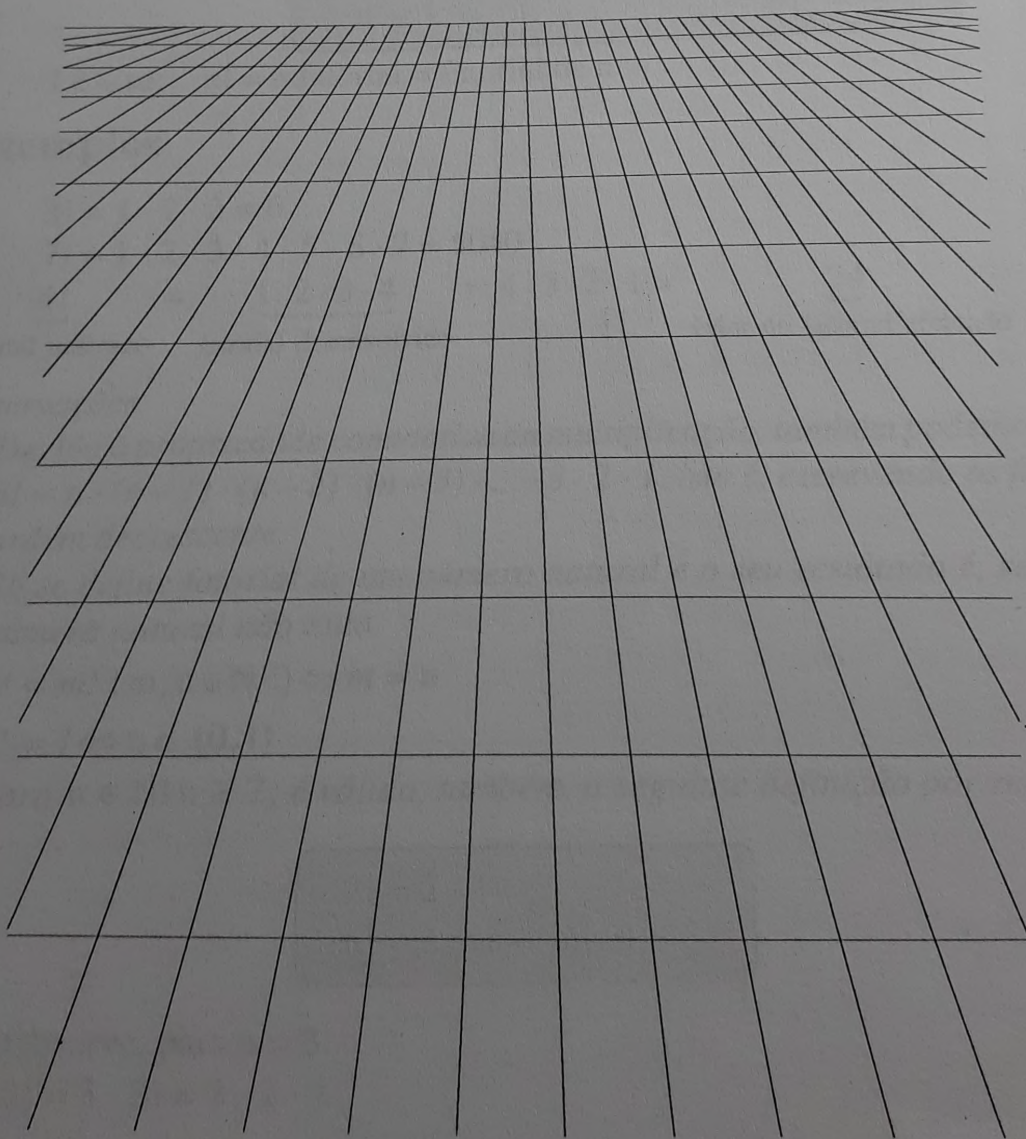
No final de cada volume desta coleção, o leitor encontrará uma seleção de testes e questões, recentes ou não, retirados dos principais exames vestibulares não só de São Paulo como de outros Estados brasileiros.

Desde já, agradecemos por eventuais comentários, críticas ou sugestões que nos sejam enviados pelos leitores deste trabalho, pois, para nós, terão grande importância e serão muito bem recebidos.

Conteúdo

Testes e Questões de Vestibulares 137

Respostas 185

Fatorial de um Número Natural – Números Binomiais

A – Introdução

Neste livro preferimos colocar os tópicos estudados numa ordem tal que facilite o entendimento e o aprendizado por parte dos leitores. Assim sendo, a seqüência dos capítulos não obedece à ordem da evolução que tais assuntos tiveram historicamente.

Ao final do capítulo 4 deste livro, comentamos alguns aspectos do desenvolvimento histórico da Análise Combinatória e da Teoria das Probabilidades.

B – Fatorial de um número natural

Definição

Dado um número natural **n**, definimos:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \left(n \in \mathbf{N} \middle| n \geq 2\right)$$

Lê – se: $n! = n$ fatorial = fatorial de n

Exemplos

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$
$$\underbrace{4!}_{\text{fatorial indicado}} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{\text{fatorial desenvolvido}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underbrace{24}_{\text{valor do fatorial efetuado}}$$

Observações

1ª) *Devido à propriedade comutativa da multiplicação, também podemos definir:* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, *isto é, escrevendo os fatores em ordem decrescente.*

2ª) *Só se define fatorial de um número natural e o seu resultado é, sempre, um número natural não nulo.*

3ª) $n! = m! \ (m, n \in \mathbf{N}^*) \Leftrightarrow m = n$

4ª) $n! = 1 \Leftrightarrow n \in \{0, 1\}$

5ª) *Para* $n \in \mathbf{N} | n \geq 2$, *é válida, também, a seguinte definição por recorrência:*

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$n! = n \cdot (n-1)! \ (n \geq 3)$$

Observe, para n = 3:

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Estendendo essa definição para n = 2, teremos:

$$2! = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1! = \frac{2!}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Repetindo esse procedimento para n = 1, teremos:

$$1! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Isto justifica as definições $0! = 1$ e $1! = 1$ dadas anteriormente. Mais adiante, quando estudarmos o desenvolvimento de $(a + b)^n$, poderemos justificar de outro modo estas definições.

Exercícios

1 Efetue, simplificando quando possível:

a) $5!$ b) $0! + 2!$ c) $1! - 3!$ d) $\frac{4!}{3!}$ e) $\frac{5!}{6!}$ f) $\frac{2! + 4!}{6!}$

2 Dê o valor dos seguintes fatoriais:

a) $0!$ b) $1!$ c) $2!$ d) $3!$ e) $4!$ f) $5!$
g) $6!$ h) $7!$ i) $8!$ j) $9!$ h) $10!$

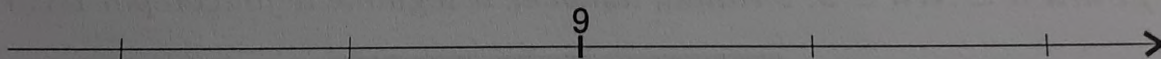
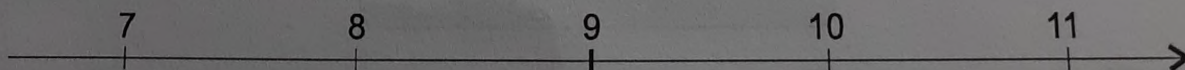
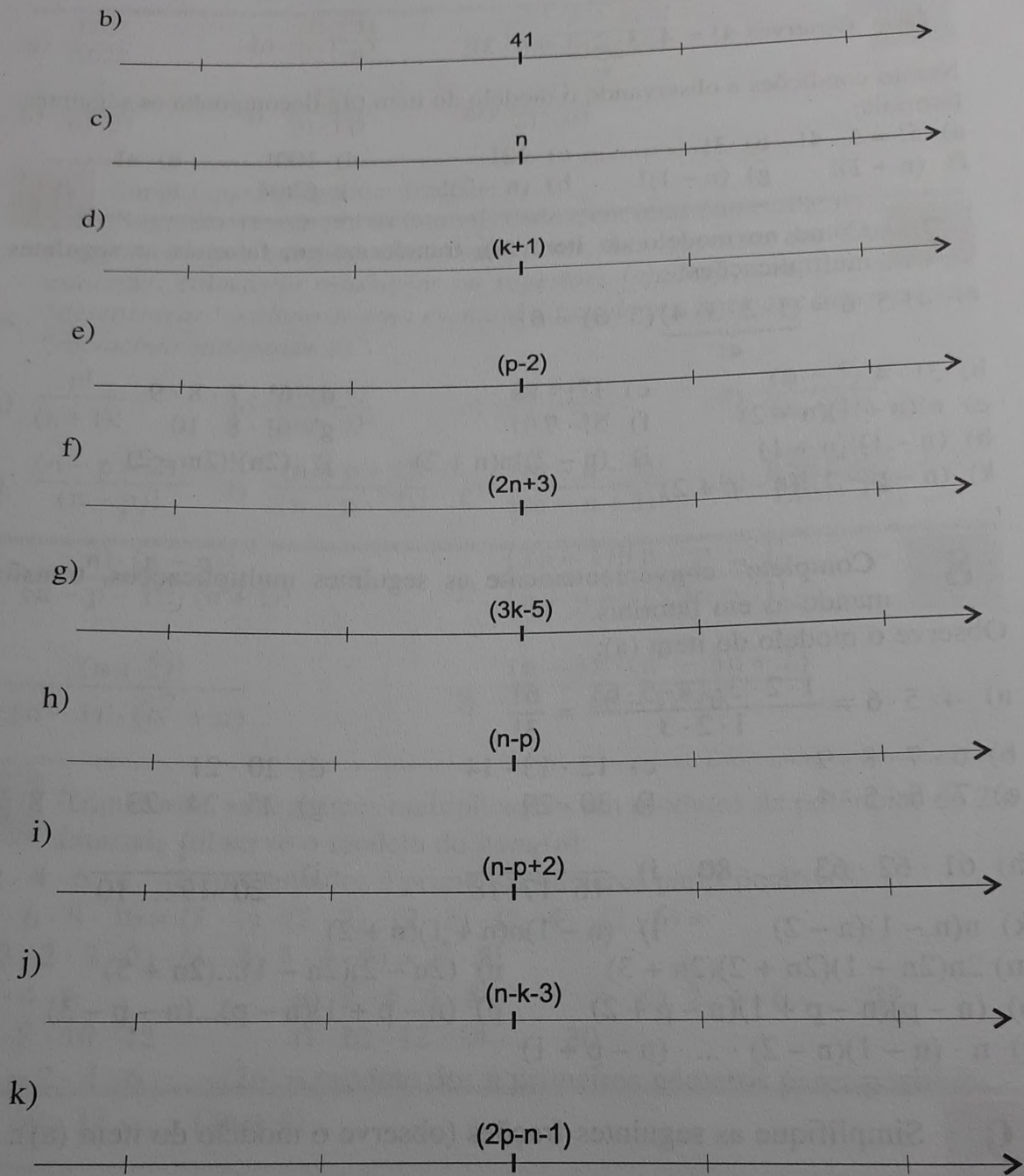
3 Determine **n** nas seguintes equações:

a) $n! = 6$ b) $n! = 10$ c) $n! = 1$
d) $2 \cdot n! - 140 = 100$ e) $(n!)^2 - 23 \cdot n! - 24 = 0$

Note bem: $2n! = 2(n!)$ (verdade) ; $2n! = (2n)!$ (falso)

Observação: a não ser que se diga algo em sentido contrário, fica aqui convencionado que o leitor deve, sempre, considerar satisfeitas as condições de existência nos exercícios literais.

4 Complete as seguintes figuras (retas numeradas) colocando os dois **números naturais** anteriores e os dois posteriores do número dado (observe o modelo do item (a)):

a)

Resposta:

5 Complete as **seqüências crescentes** seguintes, todas com 5 números naturais consecutivos (observe o modelo):

a) (, , 4, ,) Resposta: (2, 3, 4, 5, 6)

b) (, 16, ,18,) c) (79, , , , 83) d) (, k, , ,)

e) (n – 6, , , ,) f) (, p + 1, , p + 3,)

g) (K – 2, , , k + 1,) h) (, , n – p – 1, ,) i) (, , , 2n,)

j) (, , 2n – p + 1, ,) k) (, , , n – k – 1,)

6 Observe: $4! = 4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3!} = 4 \cdot 3!$

Nessas condições e observando o modelo do item (a), decomponha os seguintes fatoriais:

a) $5! = 5 \cdot 4!$ b) $3!$ c) $12!$ d) $100!$ e) $n!$
f) $(n + 2)!$ g) $(n - 1)!$ h) $(n - 3)!$ i) $(2n)!$

7 Como no modelo do item (a), transforme em fatoriais as seguintes multiplicações:

a) $4! \cdot 5 \cdot 6 = \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)}_{4!}(5 \cdot 6) = 6!$

b) $3! \cdot 4$ c) $17! \cdot 18$ d) $6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$
e) $n!(n + 1)(n + 2)$ f) $5! \cdot 7$ g) $6! \cdot 8 \cdot 10$
h) $(n - 1)!(n + 1)$ i) $(n - 2)!n(n + 2)$ j) $(2n)!(2n + 2)$
k) $(n - p - 1)!(n - p + 2)$

8 "Complete" convenientemente as seguintes multiplicações, transformando-as em fatoriais.

Observe o modelo do item (a):

a) $4 \cdot 5 \cdot 6 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (4 \cdot 5 \cdot 6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{6!}{3!}$

b) $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ c) $12 \cdot 13 \cdot 14$ d) $20 \cdot 21$
e) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ f) $30 \cdot 29$ g) $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 8$
h) $61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot \ldots \cdot 80$ i) $\dfrac{1}{16 \cdot 17 \cdot 18}$ j) $\dfrac{1}{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 10}$
k) $n(n - 1)(n - 2)$ l) $(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$
m) $2n(2n + 1)(2n + 2)(2n + 3)$ n) $(2n - 2)(2n - 1)\ldots(2n + 5)$
o) $(n - p)(n - p + 1)(n - p + 2)$ p) $(n - p + 1)(n - p)\ldots(n - p - 3)$
q) $n \cdot (n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - p + 1)$

9 Simplifique as seguintes frações (observe o modelo do item (a)):

a) $\dfrac{4!}{6!} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \dfrac{1}{6 \cdot 5} = \dfrac{1}{30}$ ou, de outro modo:

$\dfrac{4!}{6!} = \dfrac{4!}{4! \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{1}{30}$

b) $\dfrac{5!}{2!}$ c) $\dfrac{9!}{8!}$ d) $\dfrac{6!}{8!}$ e) $\dfrac{3!}{7!}$ f) $\dfrac{35!}{34!}$

g) $\frac{100!}{102!}$ h) $\frac{7!\cdot 91!}{92!\cdot 6!}$ i) $\frac{12!\cdot 37!\cdot 103!}{36!\cdot 102!14!}$ j) $\frac{10!}{3!\cdot 7!}$

k) $\frac{8!}{6!\cdot 2!}$ l) $\frac{12!}{1!\cdot 11!}$ m) $\frac{21!}{21!\cdot 0!}$

10 Simplifique as seguintes frações:
(Sugestão: represente os fatoriais dados, em retas numeradas)
Atenção: sempre que julgarmos conveniente, nas respostas dos exercícios, estaremos colocando resoluções ou sugestões (ajudas), numa tentativa de "desenroscar" o aluno de uma eventual dificuldade e para que desenvolva o "raciocínio independente".

a) $\frac{n!}{(n+1)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$ d) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!}$

e) $\frac{(n-p-2)!}{(n-p)!}$ f) $\frac{(n-p+1)!}{(n-p-3)!}$ g) $\frac{(m-n-1)!}{(m-n+1)!}$ h) $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$

i) $\frac{n!\cdot(n-p)!}{(n-p-1)!\cdot(n+1)!}$ j) $\frac{(2n+1)!(n-p-1)!}{(n-p+1)!(2n-1)!}$

k) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!\cdot(n^2+n)}$ l) $\frac{(n-3)!\cdot(n^2-3n+2)}{(n-1)!\cdot n}$

11 Transforme as seguintes multiplicações em produtos de potências de 2 e fatoriais (observe o modelo do item (a):

a) $2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10$ (produto dos 5 primeiros números pares positivos)
$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10=(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot(2\cdot 5)=$
$(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)=2^5\cdot 5!$

b) $2\cdot 4\cdot 6$ c) $2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$ d) $2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot 22$

e) $6\cdot 8\cdot 10\cdot 12$ f) $10\cdot 12\cdot 14\cdot \ldots\cdot 30$

g) $P_p=2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot(2n)$ = produto dos **n** primeiros números pares positivos.

h) $8\cdot 10\cdot 12\cdot \ldots\cdot(2n+4)$

12 Como no exercício anterior, transforme em **fatoriais e potências de 2**:

a) $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ (produto dos 4 primeiros números ímpares positivos)

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{7!}{2^3\cdot 3!}$$

b) $1\cdot 3\cdot 5$ c) $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9$ d) $1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot 15$

e) $1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot 37$ f) $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13$ g) $9\cdot 11\cdot 13\cdot \ldots\cdot 25$

h) $P_i = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$ = produto dos **n** primeiros números ímpares positivos.
i) $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot ... \cdot (2n+1)$

13 Fatore convenientemente as seguintes expressões e, a seguir, simplifique (Observe o modelo do item (a)):

a) $6! + 4! = 6 \cdot 5 \cdot 4! + 4! = 4!(6 \cdot 5 + 1) = 4! \cdot 31$
b) $3! - 4! + 5!$ c) $12! - 14!$ d) $7! + 5! - 6! + 8!$ e) $n! + (n+1)!$
f) $(n+1)! - n! - (n-1)!$ g) $(2n)! + 3 \cdot (2n+2)!$
h) $(n-p-1)! - 5(n-p-2)!$ i) $(2k-1)! + 2(2k-2)! + 3 \cdot (2k-3)!$

14 Lembre-se: uma fração só pode ser simplificada quando numerador e denominador forem produtos. Observe:

$$\frac{ab+ac}{b^2-c^2} = \frac{a(b+c)}{(b+c)(b-c)} = \frac{a}{b-c}$$

Nessas condições, fatore e a seguir simplifique as seguintes frações:

a) $\dfrac{4!}{3!+5!}$ b) $\dfrac{n!+(n+1)!}{3n+6}$ c) $\dfrac{(n+1)!-n!-(n-1)!}{n!\cdot(n+1)^2}$

d) $\dfrac{(n-p+2)!}{(n-p)!+(n-p+1)!}$ e) $\dfrac{m!-(m+1)!}{(m-1)!-m!}$ f) $\dfrac{(2n)!}{n!}$

15 Determine, em cada caso, o máximo divisor comum (mdc) e o mínimo múltiplo comum (mmc) das expressões A, B e C:

a) $A = 3!$; $B = 5!$; $C = 6!$ b) $A = 2!$; $B = 4!$; $C = 8!$
c) $A = (n+2)!$; $B = n!$; $C = (n-1)!$ d) $A = 4!12!$; $B = 5!11!$; $C = 3!10!$
e) $A = k!(n-k)!$; $B = (k+1)!(n-k)!$; $C = (k-1)!(n-k-1)!$
f) $A = (n+1)! - n!$;
$B = (n-1)! + n! + (n-1)!(n-1)$;
$C = 4[(n-1)!(n-1) + (n-1)!]$ ($n \in \mathbb{N}^* \mid n$ é ímpar)

16 Efetue, e simplifique quando possível, as seguintes operações com frações:

a) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!}$ b) $\dfrac{126}{6!} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{11}{4!}$ c) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

d) $\dfrac{17!}{4!13!} + \dfrac{17!}{5!12!}$ e) $\dfrac{49!}{36!13!} + \dfrac{49!}{35!14!}$ f) $\dfrac{14!}{9!5!} - \dfrac{13!}{8!5!}$

g) $\dfrac{n!}{(n-p)!p!} + \dfrac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!}$ h) $\dfrac{2}{(n-3)!} - \dfrac{4-4n}{(n-1)!} + \dfrac{3}{(n-2)!}$

i) $\dfrac{11!}{4!7!} \cdot \dfrac{7}{5}$ j) $\dfrac{23!}{10!13!} : \dfrac{23!}{9!14!}$ k) $\dfrac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \dfrac{m-k}{k+1}$

l) $\frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} : \frac{(n+1)!}{(p-1)!(n-p+2)!}$

17 Resolva as seguintes equações na incógnita **n**:

a) $(2n-3)! = 5040$ b) $(n!)^2 - 7(n!) + 6 = 0$ c) $(n!)^2 + n! - 2 = 0$

d) $2(n!)^2 + 5n! - 3 = 0$ e) (IMEUG – 66) $\frac{m! + (m-1)!}{(m+1)! - m!} = \frac{6}{25}$

f) (IQUFRJ) $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$ g) $(\log_3 n)! = 24$

h) $\log_{120} 1 + \log_{120} 2 + \log_{120} 3 + \ldots + \log_{120} n = 1$

18 Resolver os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} (2a-b)! = 6 \\ (5a+b)! = 24 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x! - 3y! = -4 \\ 3x! + 2y! = 7 \end{cases}$

19 Lembre-se: identidade é uma sentença aberta (isto é, uma igualdade contendo variáveis) verdadeira para quaisquer valores atribuídos às variáveis. Observe o exemplo: $2(x+3) = 2x + 6$ é uma igualdade sempre verdadeira (qualquer que seja o valor atribuído a x). Indica – se: $2(x+3) \equiv 2x + 6$

Nessas condições, demonstre as seguintes identidades:

a) $(3p+1)! \equiv (3p-1)!(9p^2 + 3p)$ b) $(n+1)! - n! \equiv n!\,n$

c) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \equiv \frac{n}{(n+1)!}, \forall n \in N.$

d) $\frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{n-p}{p+1} \equiv \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$

e) $\frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \equiv \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$

f) $2(p+3)! - (p+2)!(p+2) \equiv (p+2)! + (p+3)!$

20 Calcule o valor da soma

$S = 1!1 + 2!2 + 3!3 + \ldots + p!p$

Sugestão: utilize a identidade demonstrada no exercício 19 (b).

21 Calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!}$$

Sugestão: observe a identidade do exercício 19 (c).

C - Números Binomiais (Coeficientes Binomiais)

Estudaremos, aqui, os números binomiais também chamados de coeficientes binomiais. Esses nomes se devem ao fato de que tais números aparecem como coeficientes no desenvolvimento de potências da forma $(a + b)^n$, $n \in N$, chamadas de **binômio de Newton** e que serão estudadas no capítulo seguinte.

Indica-se $\binom{n}{p}$ e lê-se **binomial de classe p do número n** ou, mais simplesmente, **binomial n sobre p**. Analogamente às frações, chamaremos n de numerador e p de denominador (ou classe) do binomial.

Definição

Dados dois números naturais n e p tais que $0 \le p \le n$, definimos:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

binomial n sobre p

Exemplos:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4!}} = 15$$

$$\binom{9}{7} = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 1 \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 36$$

Observações:

1ª) Após estudar as **combinações simples** *e o desenvolvimento do* **binômio de Newton** *poderemos justificar detalhadamente o que motiva a definição do binomial* $\binom{n}{p}$.

2ª) É importante observar as condições de existência do binomial $\binom{n}{p}$:

$n \in \mathbf{N}$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$

$p \in \mathbf{N}$ $(p = 0, 1, 2, 3, ...)$

e $n \ge p$ *(o denominador não pode ser maior que o numerador).*

3ª) Demonstra – se que o binomial é sempre um número natural não nulo, ou seja, $\binom{n}{p} \in \mathbf{N}^*$

Exercícios

22 Calcule os valores dos seguintes coeficientes binomiais:

a) $\binom{5}{3}$ b) $\binom{8}{4}$ c) $\binom{6}{5}$ d) $\binom{10}{0}$ e) $\binom{12}{1}$

f) $\binom{20}{20}$ g) $\binom{7}{4}$ h) $\binom{9}{5}$ i) $\binom{10}{5}$

23 Efetue os binomiais de cada item e procure "**descobrir**" **propriedades** dos coeficientes binomiais (supor satisfeitas as condições de existência):

a) $\binom{5}{0}$; $\binom{0}{0}$; $\binom{12}{0}$; $\binom{n}{0}$ b) $\binom{8}{1}$; $\binom{2}{1}$; $\binom{23}{1}$; $\binom{n}{1}$

c) $\binom{4}{4}$; $\binom{0}{0}$; $\binom{42}{42}$; $\binom{n}{n}$ d) $\binom{7}{6}$; $\binom{10}{9}$; $\binom{35}{34}$; $\binom{n}{n-1}$

e) $\binom{8}{2}$ e $\binom{8}{6}$ f) $\binom{7}{4}$ e $\binom{7}{3}$ g) $\binom{10}{1}$ e $\binom{10}{9}$

h) $\binom{15}{13}$ e $\binom{15}{2}$ i) $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$

24 Usando a definição de coeficiente binomial, resolva as seguintes equações:

a) $\binom{x}{2} = 78$ b) $\binom{x}{3} = \frac{55x}{3}$ c) $\binom{x}{3} = 4.\binom{x-2}{2}$

d) $\binom{x+2}{4} = 11.\binom{x}{2}$ e) $\binom{2x}{x-1} = \frac{19}{5}.\binom{2x-2}{x-1}$

C.1 – Triângulo de Pascal – Tartaglia

Antes de estudar as propriedades dos coeficientes binomiais, veremos uma maneira extremamente prática e interessante de dispor tais coeficientes. Vamos colocá-los em linhas e colunas que resultarão no formato de um triângulo denominado "**triângulo de Pascal** "ou "**triângulo de Pascal – Tartaglia**" em

homenagem a dois dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desses assuntos.

Para facilitar o seu entendimento, construiremos dois triângulos: o **triângulo dos binomiais** onde aparecem os binomiais indicados e o **triângulo dos valores** onde aparecem os valores dos binomiais efetuados.

Triângulo dos Binomiais

L = ordens das linhas.
C = ordens das colunas.

coluna de ordem 5 ↓ (coluna 5)
coluna p ↓

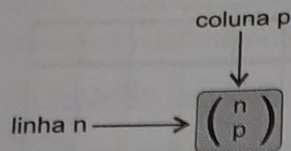
linha de ordem 0 → (linha 0)
linha de ordem 6 → (linha 6)
linha n → (linha n)

L \ C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		p-1	p	p+1	
0	$\binom{0}{0}$														
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$													
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$												
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$											
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$										
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$									
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$								
7	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$							
8	$\binom{8}{0}$	$\binom{8}{1}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{8}{8}$						
9	$\binom{9}{0}$	$\binom{9}{1}$	$\binom{9}{2}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{9}{4}$	$\binom{9}{5}$	$\binom{9}{6}$	$\binom{9}{7}$	$\binom{9}{8}$	$\binom{9}{9}$					
n-1												$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$	$\binom{n-1}{p+1}$	
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$								$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	
n+1												$\binom{n+1}{p-1}$	$\binom{n+1}{p}$	$\binom{n+1}{p+1}$	

Observações sobre o triângulo dos binomiais:

1ª) Na interseção da ***linha n*** *com a* ***coluna p*** *encontramos o binomial* $\binom{n}{p}$

coluna p

linha n → $\binom{n}{p}$

A linha de ordem n é:

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$; *note que ela é finita e tem* $(n + 1)$ *termos.*

A coluna de ordem p é: $\binom{p}{p}; \binom{p+1}{p}, \binom{p+2}{p}, \binom{p+3}{p}, \binom{p+4}{p}, \ldots$ *;note que ela é infinita.*

*2ª) Os binomiais de uma **mesma linha** têm **numeradores iguais** (numerador = ordem da linha).*

*3ª) Os binomiais de uma **mesma coluna** têm **denominadores iguais** (denominador = ordem da coluna).*

4ª) Os binomiais da 1ª coluna têm, todos, denominadores iguais a zero.

*5ª) Calculando os valores dos coeficientes binomiais e colocando esses resultados nas posições correspondentes do triângulo de Pascal, obtemos o que convencionamos chamar de **triângulo dos valores** que mostramos a seguir. Obviamente, podemos representar o triângulo de Pascal com quantas linhas e colunas quisermos.*

6ª) Para facilitar as explicações, chamaremos de "hipotenusa" do triângulo de Pascal à diagonal formada pelos elementos da forma $\binom{n}{n}$, *ou seja,* $\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{3}{3}$, *etc*

Triângulo dos valores

Na figura a seguir substituímos os coeficientes binomiais por seus valores, respeitando as suas respectivas posições.

L \ C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11					
0	1																
1	1	1															
2	1	2	1														
3	1	3	3	1													
4	1	4	6	4	1												
5	1	5	10	10	5	1											
6	1	6	15	20	15	6	1										
7	1	7	21	35	35	21	7	1									
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1								
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					

"hipotenusa" do triângulo de Pascal →

Observações sobre o triângulo dos valores:

1ª) Os binomiais da 1ª coluna são todos iguais a 1: $\binom{n}{0} = 1$

2ª) Os binomiais da "hipotenusa" são todos iguais a 1: $\binom{n}{n} = 1$

3ª) O segundo elemento e o penúltimo de cada linha são iguais à ordem da linha em que estão: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

4ª) Numa mesma linha, dois binomiais equidistantes dos extremos são iguais: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ *(coeficientes binomiais complementares)*

Exercícios

25 Observando o **triângulo dos binomiais**, escreva os elementos que são pedidos em cada caso:

a) da linha de ordem 4.

b) da 4ª linha (ou seja, a linha de ordem 3).

c) da 3ª coluna (5 primeiros elementos).

d) da coluna de ordem 6 (5 primeiros elementos).

e) da diagonal (paralela à hipotenusa) que começa no binomial $\binom{3}{0}$ (5 primeiros termos).

f) da diagonal que começa em $\binom{5}{0}$ (5 primeiros termos).

26 Observe o **triângulo dos binomiais** e escreva os dois binomiais imediatamente à esquerda e os dois à direita de cada binomial dado (supor satisfeitas as condições de existência):

a) $\binom{4}{2}$ b) $\binom{8}{6}$ c) $\binom{n}{p}$ d) $\binom{n-1}{p+1}$ e) $\binom{n-k+1}{p-2}$

27 Observe o **triângulo dos binomiais** e escreva os dois binomiais imediatamente acima e os dois abaixo do binomial dado. (supor satisfeitas as condições de existência):

a) $\binom{7}{5}$ b) $\binom{8}{1}$ c) $\binom{n}{p}$ d) $\binom{n+k}{k}$ e) $\binom{n-3}{4}$

28 Observando no **triângulo dos valores** a sua linha de ordem 6 $\left(\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \text{etc}\right)$, calcule as somas de pares de termos consecutivos: (1º + 2º), (2º + 3º), (3º + 4º), e assim por diante.
A seguir, tente "descobrir" uma propriedade para essas somas.

29 Observando no **triângulo dos valores** a coluna de ordem 3 $\left(\binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \text{etc}\right)$, dê os valores das seguintes somas e tente "descobrir" uma propriedade para tais somas:

a) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3}$ b) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}$ c) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$

d) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$

30 Observando no **triângulo dos valores** a diagonal $\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2}$, etc, calcule as seguintes somas e procure "descobrir" uma propriedade para elas:

a) $\binom{4}{0} + \binom{5}{1}$ b) $\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2}$ c) $\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3}$

d) $\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4}$

31 A partir do **triângulo dos valores** calcule a soma dos termos da linha:

a) de ordem 1. b) de ordem 2. c) de ordem 3. d) de ordem 4.
e) de ordem n (tente "descobrir" a partir dos resultados anteriores).

C.2 – Propriedades dos coeficientes binomiais

P.1) $\binom{n}{0} = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}$

demonstração:

$$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n}!}{0!\cancel{n}!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \quad \text{c.q.d}$$

Obs: no triângulo de Pascal, os binomiais da forma $\binom{n}{0}$ *são os da 1ª coluna.*

P.2) $\binom{n}{1} = n \quad , \forall n \in \mathbf{N}^*.$

demonstração:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{1.(n-1)!} = n \quad \text{c.q.d.}$$

Obs: no triângulo de Pascal, os binomiais da forma $\binom{n}{1}$ *são os da 2ª coluna.*

P.3) $\binom{n}{n} = 1 \quad , \forall n \in \mathbf{N}$

demonstração:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{1.0!} = 1 \quad \text{c.q.d.}$$

Obs: no triângulo de Pascal, os binomiais da forma $\binom{n}{n}$ *são os da hipotenusa, ou seja, são os últimos elementos de cada linha.*

P.4) $\binom{n}{n-1} = n \quad , \quad \forall n \in N^*$

demonstração:

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\left[n-(n-1)\right]!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!.1!} = 1 \quad \text{c.q.d.}$$

Obs: no triângulo de Pascal, os binomiais da forma $\binom{n}{n-1}$ *são os penúltimos de cada linha.*

P.5) Binomais complementares são iguais

Definição

Dois coeficientes binomais são **complementares** quando têm mesmo numerador e a soma dos seus denominadores é igual ao numerador.

Exemplos: $\binom{7}{2}$ e $\binom{7}{5}$, $\binom{13}{11}$ e $\binom{13}{2}$, etc.

Observe:

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ → numeradores iguais → $p + (n - p) = n$

Propriedade: Eles têm valores iguais.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Demonstração

$$2^{\circ}\text{ membro} = \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\left[n-(n-p)\right]!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p} = 1^{\circ}\text{ membro}$$

Obs: no triângulo de Pascal, os binomiais complementares são sempre de uma mesma linha e eqüidistantes dos extremos.

P.6) Relação de Stifel ("um binomial mais o seguinte dá o de baixo")

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exemplo $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$

Considerando a posição dos binomiais no triângulo de Pascal, temos o seguinte:

$$\begin{array}{lcc} & \text{coluna } p & \text{coluna } p+1 \\ \text{linha } n \longrightarrow & \binom{n}{p} + & \binom{n}{p+1} \\ & & \parallel \\ \text{linha } n+1 \longrightarrow & & \binom{n+1}{p+1} \end{array}$$

Demonstração

$$1^\circ \text{ membro} = \binom{n}{p} + \binom{n}{n+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} =$$

$$\frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{n!.[p+1+n-p]}{(n-p)!(p+1)} = \frac{n!.(n+1)}{(n-p)!(p+1)!} =$$

$$\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1} = 2^\circ \text{ membro.} \quad \text{c.q.d.}$$

Observações:

1ª) Evidentemente, esta propriedade é extremamente útil na construção do triângulo (dos valores) de Pascal.

2ª) Embora esta propriedade receba o nome de relação de Stifel (presume – se que viveu de 1486 até 1567), consta que o matemático árabe Al – Karaji (viveu no final do século X) já conhecia tal propriedade.

P.7) Relação de Fermat

("permite achar um binomial a partir do anterior, numa mesma linha")

$$\binom{n}{p} . \frac{n-p}{p+1} = \binom{n}{p+1}$$

Exemplo: $\binom{7}{2} \cdot \frac{7-2}{2+1} = \binom{7}{2} \cdot \frac{5}{3} = \binom{7}{3}$

Demonstração

$$1^\circ \text{ membro} = \binom{n}{p} \cdot \frac{n-p}{p+n} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{n-p}{p+1} = \frac{n! \cdot (n-p)}{p!(p+1) \cdot (n-p-1)!(n-p)}$$

$$= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \binom{n}{p+1} = 2^\circ \text{ membro} \quad \text{c.q.d.}$$

Observações:

1ª) Adiante veremos que esta relação nos permite desenvolver $(a+b)^n$, qualquer que seja $n \in N$

2ª) Pierre de Fermat (1601 – 1665), Blaise Pascal (1623 – 1662) e Isaac Newton (1646–1727) são matemáticos que sabidamente trabalharam nesta propriedade que permite, a partir de um coeficiente binomial conhecido, achar o seguinte da mesma linha.

P.8) Teorema das linhas

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots\binom{n}{n}=2^n \quad \forall n \in N$$

ou, utilizando a notação de somatória (veja apêndice I deste livro):

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

Exemplo

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3$$

Demonstração pelo princípio da indução finito – PIF (veja apêndice II deste livro):

1ª Parte: Verificação para $n = 0$

1º membro $=\binom{0}{0}=1$

2º membro $=2^0=1$ e, portanto, 1º membro = 2º membro.

2ª Parte: Hipótese de indução: $(n = p)$

$$\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\ldots+\binom{p}{p}=2^p$$

Tese de indução: $(n = p + 1)$

$$\binom{p+1}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+1}{2}+\ldots+\binom{p+1}{p}+\binom{p+1}{p+1}=2^{p+1}$$

demonstração da 2ª parte:

pela hipótese de indução, temos:

$$\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\ldots\ldots+\binom{p}{p+1}+\binom{p}{p}=2^p$$

$$\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\binom{p}{3}+\ldots\ldots+\binom{p}{p-1}+\binom{p}{p}=2^p$$

$$(1)\quad \binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+1}{2}+\binom{p+1}{3}+\ldots\binom{p+1}{p-1}+\binom{p+1}{p}+\binom{p}{p}=\underbrace{2^p+2^p}_{2\cdot 2^p}$$

note que, ao somarmos as duas igualdades membro a membro, aplicamos convenientemente a relação de Stifel.

A seguir, podemos verificar que

$\binom{p}{0}=1=\binom{p+1}{0}$ e que

$\binom{p}{p}=1=\binom{p+1}{p+1}$ e, substituindo em (1), teremos:

$$\binom{p+1}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+1}{2}+\ldots+\binom{p+1}{p}+\binom{p+1}{p+1}=2^{p+1}$$

que é a tese de indução que queríamos demonstrar.

P.9) Teorema das colunas

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

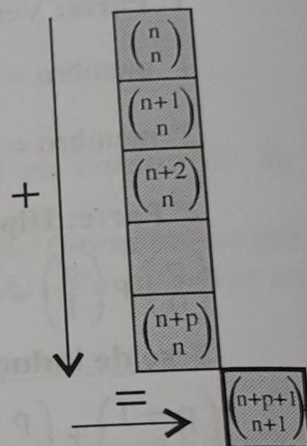
ou, na forma de somatória:

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}=\binom{n+p+1}{n+1} \quad \forall n, p \in \mathbf{N}$$

Exemplo

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}=\binom{7}{4}$$

É muito mais fácil entender esta propriedade observando a posição dos binomiais no triângulo de Pascal:

Note que essa soma deve começar, sempre, pelo primeiro elemento da coluna e pode ter tantas parcelas quanto nos interessar. Na coluna acima somamos (p + 1) binomiais consecutivos, isto é, de $\binom{n}{n}$ até $\binom{n+p}{n}$.

Demonstração pelo PIF:

Fixemos, inicialmente, um número qualquer $n \in \mathbf{N}$ que determina a coluna em que iremos efetuar a demonstração.

Tese: $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$, $\forall p \in \mathbf{N}$

1ª Parte: Verificação para p = 0

1º membro = $\binom{n}{n} = 1$

2º membro = $\binom{n+0+1}{n+1}=\binom{n+1}{n+1}=1$

portanto, 1º membro = 2º membro.

2ª Parte:

Hipótese de indução (p = k)

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$$

Tese de indução: (p = k + 1)

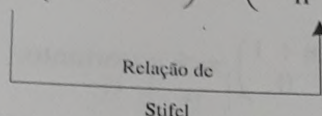
$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+k+2}{n+1}$$

demonstração da 2ª parte:
1º membro da tese =

$$=\underbrace{\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}}_{(1)}+\binom{n+k+1}{n}$$

pela hipótese de indução sabemos que $(1)=\binom{n+k+1}{n+1}$, portanto,

$$\binom{n+k+1}{n+1}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+k+2}{n+1}= 2^{\circ}\text{ membro da tese}$$

Relação de Stifel

Está, então, demonstrado o teorema das colunas.

P.10) Teorema das diagonais

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$$

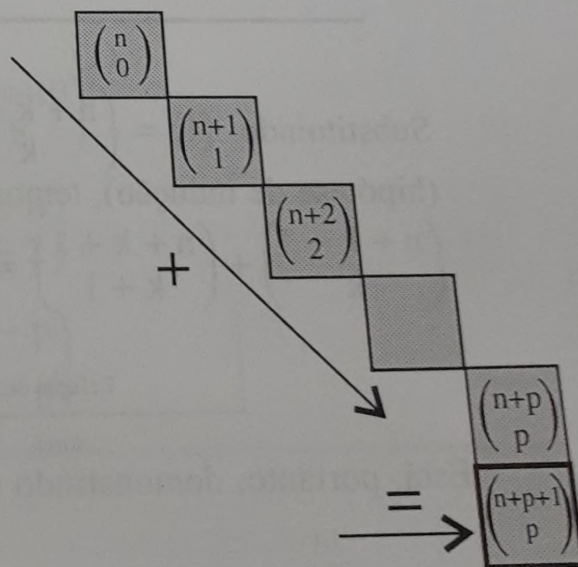
ou, de outro modo:

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{i}=\binom{n+p+1}{p}$$

Exemplo

$$\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}$$

Evidentemente, o nome "teorema das diagonais" se deve às posições que os binomiais ocupam no triângulo de Pascal.

Observe:

É importante notar que essa soma deve começar, sempre, por um elemento da forma $\binom{n}{0}$ mas pode ter quantas parcelas nos interessar: na soma acima há $(p + 1)$ parcelas, isto é, de 0 até p.

Demonstração pelo PIF:

Após fixar um número qualquer que determina a diagonal a ser somada, temos:

Tese:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}, \quad \forall p \in N$$

1ª Parte: Verificação para $p = 0$

$$1^\circ \text{ membro} = \binom{n}{0} = 1$$

$$2^\circ \text{ membro} = \binom{n+0+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \text{ e portanto,}$$

1° membro = 2° membro.

2ª Parte:

Hipótese de indução: $(p = k)$

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Tese de Indução: $(p = k + 1)$

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

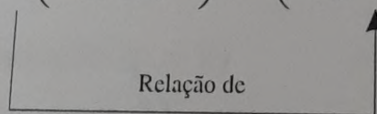
demonstração da 2ª parte:

1° membro da tese

$$= \underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k}}_{(1)} = \binom{n+k+1}{k}$$

Substituindo $(1) = \binom{n+k+1}{k}$

(hipótese de indução), temos:

$$\binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1} = 2^\circ \text{ membro da tese}$$

Relação de Stifel

Está, portanto, demonstrado o teorema das diagonais.

Exercícios

32 A proposta deste exercício é que você dê os resultados do que se pede, usando apenas as propriedades dos coeficientes binomiais, isto é, não deve desenvolver os binomiais usando a sua definição:

a) $\binom{13}{13}$ b) $\binom{7}{1}$ c) $\binom{8}{0}$

d) $\binom{15}{14}$ e) $\binom{12}{4} + \binom{12}{5}$ f) $\binom{37}{13} + \binom{37}{12}$

g) $\binom{6}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{2} + \ldots + \binom{15}{9}$ h) $\binom{10}{4} \cdot \frac{6}{5}$

i) $\binom{42}{41}$ j) $\binom{100}{0}$

k) $\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \ldots + \binom{30}{5}$ l) $\binom{13}{3} \cdot \frac{3}{11}$

m) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$ n) $\binom{m+2}{p-1} + \binom{m+2}{p-2}$

o) $\binom{n-3}{p+1} + \binom{n-3}{p+2}$ p) $\binom{n+3}{n+3}$ q) $\binom{2n}{0}$

r) $\binom{n-p}{n-p-1}$ s) $\binom{n-p+1}{n-p}$

t) $\binom{12}{12} + \binom{13}{12} + \binom{14}{12} + \binom{15}{12}$

u) $\binom{p+2}{0} + \binom{p+3}{1} + \binom{p+4}{2} + \ldots + \binom{p+10}{8}$

v) $\binom{n-2}{n-2} + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n+4}{n-2}$

w) $\binom{n-p}{0} + \binom{n-p}{1} + \binom{n-p}{2} + \ldots + \binom{n-p}{n-p}$

33 Determine **x** nas seguintes equações com coeficientes binomiais: (Sugestão: use a propriedade P.5 dos binomiais complementares)

a) $\binom{12}{4} = \binom{12}{x}$ b) $\binom{31}{x} = \binom{31}{13}$ c) $\binom{9}{2x+1} = \binom{9}{x+4}$

d) $\binom{16}{3x+1} = \binom{16}{4x+1}$ e) $\binom{14}{x^2-3} = \binom{14}{3x+7}$

34 Usando as propriedades dos números binomiais, determine x nos seguintes casos:

a) $x = \binom{8}{8} + \binom{9}{8} + \binom{10}{8} + \binom{11}{8}$ b) $x = \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \ldots + \binom{20}{10}$

c) $x = \binom{7}{0} + \binom{8}{1} + \binom{9}{2} + \ldots + \binom{16}{9}$

d) $x = \binom{5}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4} + \ldots + \binom{20}{17}$

e) $x = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \ldots + \binom{6}{6}$

f) $x = \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \ldots + \binom{13}{12}$

g) $x = \left[\binom{10}{0} + \binom{11}{1} + \ldots + \binom{15}{5}\right] - \left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{14}{3}\right]$

35 Usando a relação de Stifel, decomponha cada binomial dado numa soma de dois elementos da linha anterior. Observe o modelo do item (a):

a) $\binom{14}{6} = \binom{13}{6} + \binom{13}{5}$ b) $\binom{42}{37}$ c) $\binom{6}{1}$ d) $\binom{17}{8}$

e) $\binom{n}{p}$ f) $\binom{n-2}{p+2}$ g) $\binom{n}{p-3}$ h) $\binom{n-p-1}{p-2}$

36 É fácil perceber que a relação de Stifel gera duas outras igualdades. Observe:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\rightarrow \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} = \binom{n}{p}$$

$$\rightarrow \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1}$$

Utilizando essas igualdades, calcule:

a) $\binom{17}{5}+\binom{17}{6}$ b) $\binom{31}{3}+\binom{31}{2}$ c) $\binom{45}{12}-\binom{44}{11}$ d) $\binom{19}{6}-\binom{18}{6}$

e) $\binom{21}{8}-\binom{22}{8}$ f) $\binom{25}{13}-\binom{26}{14}$ g) $\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p+2}$

h) $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p-2}$ i) $\binom{n+3}{p}-\binom{n+2}{p}$ j) $\binom{n-3}{p}-\binom{n-4}{p-1}$

37 Usando a relação de Fermat $\binom{n}{p}\cdot\frac{n-p}{p+1}=\binom{n}{p+1}$, calcule o valor de x em cada caso:

a) $x=\binom{13}{5}\cdot\frac{8}{6}$ b) $\binom{25}{10}\cdot x=\binom{25}{11}$ c) $x=\dfrac{\binom{16}{9}}{\binom{16}{8}}$

d) $\binom{33}{11}\cdot x=\binom{33}{10}$ e) $x\cdot\frac{6}{7}=\binom{12}{7}$ f) $x=\dfrac{\binom{10}{6}}{\binom{10}{7}}$

38 Usando a relação de Fermat e lembrando que $\binom{9}{0}=1$, determine os valores dos binomiais da linha de ordem 9 do triângulo de Pascal:

$$\binom{9}{0},\binom{9}{1},\binom{9}{2},\ldots,\binom{9}{9}$$

39 Dê o valor das seguintes somatórias:

a) $\sum_{i=0}^{7}\binom{p+i}{p}$ b) $\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{i}$ c) $\sum_{i=0}^{k+2}\binom{k+2}{i}$ d) $\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n-1}{k}$

e) $\sum_{j=0}^{10}\binom{n+j}{2+j}$ f) $\sum_{j=2}^{p}\binom{n+j}{n}$ g) $\sum_{k=2}^{p-2}\binom{p-1}{k}$

h) $\left[\sum_{i=0}^{p}\binom{n-p-1+i}{i}\right]+\left[\sum_{i=0}^{n-p+1}\binom{p-2+i}{p-2}\right]$

40 Usando as propriedades do triângulo de Pascal, demonstre as seguintes identidades:

a) $\binom{n+1}{p+1} - \binom{n+1}{p} \equiv \binom{n}{p+1} - \binom{n}{p-1}$

b) $\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{i} + \sum_{i=1}^{p}\binom{n+i}{i+1} \equiv \binom{n+p+2}{n+1} - n - 1$

c) $\binom{n-1}{k-2}\cdot\frac{n}{k-1} - \binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-2} + \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-1} \equiv \binom{n}{k}$

41

Usando as propriedades do triângulo de Pascal, resolva as seguintes equações:

a) $\binom{32}{x} = \binom{31}{10} + \binom{31}{9}$ b) $\binom{26}{8} = \binom{25}{8} + \binom{25}{x}$ c) $\binom{16}{4} - \binom{15}{x} = \binom{15}{4}$

d) $\binom{10}{7} + \binom{10}{2} = \binom{11}{x}$ e) $\binom{x}{4}\cdot\frac{3}{5} = \binom{x}{5}$ f) $\binom{x}{5} = \frac{21}{10}\cdot\binom{x}{3}$

42

Usando as propriedades convenientes, determine o valor de **x** nas seguintes equações com números binomiais:

a) $\binom{2x+1}{0} + \binom{2x+1}{1} + \ldots + \binom{2x+1}{2x+1} = 512$

b) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \ldots + \binom{x}{x-1} = 511$

c) $\binom{2x}{0} + \binom{2x}{1} + \binom{2x}{2} + \ldots + \binom{2x}{2x} = 3\cdot 2^{x+1} + 16$

d) $$\frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{x-1}{3}}{\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \ldots + \binom{x-2}{4}} = \frac{5}{3}$$

e) $\binom{x-3}{2} + \binom{x-3}{3} + \binom{x-3}{4} + \ldots + \binom{x-3}{x-4} = 1025 - x$

43

Resolver as seguintes equações com números binomiais:

a) $\sum_{i=0}^{18}\binom{5+i}{i} = \binom{23}{x-5} + \binom{23}{x-6}$ b) $\sum_{i=0}^{11}\binom{4+i}{i} - \binom{15}{4} = \binom{15}{6-x}$

c) $$\frac{\sum_{i=2}^{x}\binom{i}{2}}{\sum_{i=3}^{x}\binom{i}{i-3}} = x - 5$$

Exercícios de Fixação

44 Calcule:

a) $0! + 1! + 2!$ b) $3! + 4! + 5!$ c) $7! - 6!$ d) $10! - 9!$

45 Determine n nos casos:

a) $n! = 720$ b) $n! = 40320$ c) $n! = 36200$ d) $3n! = 2160$
e) $(2n)! = 24$ f) $2n! = 10080$ g) $(5n)! = 120$ h) $(2n - 1)! = 5040$

46 Calcule n nos casos :

a) $100 < n! < 700$ b) $500 \leq (5n - 4)! \leq 2000$

c) $\begin{cases} 200 < n! < 40.000 \\ 4.000 < n! < 50.000 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 800 < n! < 50.000 \\ n^2 - 14n + 48 = 0 \end{cases}$

47 Determine n nos casos:

a) $(n!)^2 + 240 = 122\,n!$ b) $(n!)^2 = 18\,n! + 144$

48 Usando fatoriais ache, em cada caso, uma expressão que seja equivalente a expressão dada :

a) $7 \cdot 6 \cdot 5$ b) $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$ c) $23 \cdot 22 \cdot 21$

d) $11 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 16$ e) $13 \cdot 6 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 18$ f) $21 \cdot 10 \cdot 19 \cdot 9$

g) $95 \cdot 94 \ldots 70 \cdot 69$ h) $\dfrac{1}{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 21 \cdot 20}$ i) $\dfrac{1}{25 \cdot 12 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 21 \cdot 10}$

j) $(n+3)(n+2)(n+1)$ k) $(n - p + 1)(n - p)(n - p - 1)$

l) $(n - p + 1)(n - p) \ldots (n - 2p)$ m) $n^2 - 2kn - n + k^2 + k$

49 Simplifique as frações :

a) $\dfrac{10!}{8!}$ b) $\dfrac{13!}{15!}$ c) $\dfrac{12!}{11!}$ d) $\dfrac{50!}{48!}$

e) $\dfrac{7!20!}{6!21!}$ f) $\dfrac{25!12!}{10!27!}$ g) $\dfrac{30!4!}{27!6!}$ h) $\dfrac{13!17!}{10!19!}$

50 Simplifique as sequintes frações :

a) $\dfrac{(n-2)!}{(n-3)!}$ b) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ c) $\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!}$

d) $\dfrac{(n-2)!n!}{(n-1)!(n-1)!}$ e) $\dfrac{(n+1)!(n-1)!}{(n-3)!(n+3)!}$ f) $\dfrac{(n-5)!(n+3)!}{(n+5)!(n-7)!}$

51 Simplifique:

a) $\dfrac{7!-5!}{8!}$ b) $\dfrac{5!-4!}{6!}$ c) $\dfrac{8!-6!}{2\cdot 6!-5!}$

d) $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$ e) $\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+(n-1)!}$ f) $\dfrac{(n-2)!+(n+1)!}{(n+1)!-(n-1)!}$

52 Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}$ b) $\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}$ c) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-2)!}$

53 Resolver as equações :

a) $\dfrac{n!-8!}{89}=40.320$ b) $\dfrac{(n+2)!-n!}{5!}=330$ c) $\dfrac{(n+2)!-(1+n)\cdot(n+1)!}{7!}=72$

54 Resolver as equações:

a) $(n-2)!=4\cdot(n-3)!$ b) $20\cdot(n-2)!=n!$ c) $\dfrac{n!}{(n-4)!}=15\cdot\dfrac{(n-2)!}{(n-5)!}$

d) $12x=\dfrac{x!}{(x-3)!}$ e) $\dfrac{(m+1)!}{(m-2)!}=5m(m+1)$

f) $\dfrac{x!}{(x-4)!}+\dfrac{x!}{(x-2)!}=\dfrac{13\cdot x!}{(x-2)!}$ g) $\dfrac{(2x)!}{(2x-3)!}=\dfrac{14\cdot x!}{(x-3)!}$

h) $\dfrac{n!}{(n+2)!}=\dfrac{1}{30}$ i) $\dfrac{5\cdot n!}{(n-3)!3!}=\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!4!}$

55 Colocar na forma de potências e fatoriais :

a) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14$

b) $8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20$

c) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13$

d) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17$

e) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-12)$

f) $n \cdot (n^2-1) \cdot (n^2-4) \cdot (n^2-9) \cdot (n^2-16)$

56 Colocar na forma de potências e fatoriais :

a) o produto dos n primeiros números pares (não-nulos)

b) o produto dos n primeiros números ímpares

c) o produto do 2n primeiros números pares (não-nulos)

d) o produto dos 2n primeiros números ímpares.

57 Colocar na forma de potências e fatoriais:

a) $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}$

b) $[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)]^3 \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)]^2$

58 Mostre que : $\dfrac{(2n)!}{n!} = 2^n \cdot I$

onde I é o produto dos n primeiros números ímpares.

59 Mostre que :

$$(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdots (4n-3) \cdot (4n-1) = \frac{(4n)!\, n!}{2^n \cdot [(2n)!]^2}$$

60 Resolver as equações :

a) $\sqrt[n!]{2^{(n+1)!}} \cdot \sqrt[(n+1)!]{16^{(n+2)!}} = 512$

b) $4^{n!} + 64 = 65 \cdot 2^{n!}$

c) $(n!)^2 - 600 = \log_{1/2} 2^{n!}$

d) $729 \cdot 4^{n!} + 665 \cdot 6^{n!} = 64 \cdot 9^{n!}$

e) $(n!)^{\log_{120} n!} = \dfrac{120^2}{n!}$

61 (MAPOFEI - 73) Seja x um número real estritamente positivo e diferente da unidade, seja um número natural maior que a unidade.

Mostre que : $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}+\ldots+\frac{1}{\log_n x}=\frac{1}{\log_{n!} x}$

62 (ITA) - Resolver a equação : $\log_{\mu}(S\cdot x)=1$

onde: $S=\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{2}{2\cdot 2!}+\frac{3}{2\cdot 2!}+\ldots+\frac{n}{2\cdot(n+1)!}$, e $\mu=\frac{1}{(n+2)!}$

63 Resolver as inequações : $n \in \mathbf{R}$

a) $(2n+3)! > (n-6)!$ b) $20 < (n-2)! < 1000$ c) $(4n-1)! < (12n+3)!$
d) $30 < (n-3)! < 5070$

64 Considere o número 700!
Pergunta-se :

a) Quantos zeros possui a terminação de seu resultado?
b) É tal resultado divisível por 15^{162}
c) É tal resultado divisível por 6^{972}

65 Sendo P o produto dos termos de um P . G . de n termos (positivos) de razão q e primeiro termo a , mostre que $\log_q P + n\log_{\frac{1}{q}} a = \frac{n!}{2(n-2)!}$

66 Determine n de modo que os números: $\frac{(n-1)!}{4!}$; $n!$; $23(n+1)!$ estejam em P. G. nesta ordem.

67 Calcule :

a) $\binom{7}{0},\binom{7}{1},\binom{7}{2},\binom{7}{3},\binom{7}{4},\binom{7}{5},\binom{7}{6}$ e $\binom{7}{7}$ b) $\binom{9}{0}$ e $\binom{9}{9}$

c) $\binom{9}{1}$ e $\binom{9}{8}$ d) $\binom{9}{2}$ e $\binom{9}{7}$ e) $\binom{9}{3}$ e $\binom{9}{6}$ f) $\binom{9}{4}$ e $\binom{9}{5}$

68 Calcule :

a) $\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$ b) $\binom{n}{1}$ e $\binom{n}{n-1}$ c) $\binom{n}{3}$ e $\binom{n}{n-3}$

69 Determine n para que exista os seguintes binomiais :

a) $\binom{n+5}{n-3}$ b) $\binom{n}{n-4}$ c) $\binom{n+5}{5-n}$

70 Determine o domínio da função f definida por $f(x) = \binom{5+x}{6-x}$

71 Determine x nos casos :

a) $\binom{x}{3} = 30x$ b) $\binom{x}{2} = 45$ c) $\binom{x}{4} = \binom{x}{5}$ d) $\binom{x}{x-3} = \binom{x}{3}$

72 Resolver as equações :

a) $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 105$ b) $\binom{\binom{n}{2}}{3} = 12\binom{n}{2}$

73 Em cada caso dê o número binomial complementar do número binomial dado.

a) $\binom{9}{3}$ b) $\binom{15}{1}$ c) $\binom{17}{16}$ d) $\binom{30}{21}$ e) $\binom{33}{14}$

f) $\binom{n}{0}$ g) $\binom{n}{p}$ h) $\binom{n}{n-k}$ i) $\binom{n}{n-p}$ j) $\binom{2n+4}{n-1}$

74 Determine x nos casos :

a) $\binom{13}{x} = \binom{13}{5}$ b) $\binom{15}{2x} = \binom{15}{7}$ c) $\binom{17}{2} = \binom{17}{x}$

d) $\binom{22}{2x} = \binom{22}{6}$ e) $\binom{18}{x+1} = \binom{18}{3x-11}$ f) $\binom{108}{x^2-3} = \binom{108}{x+39}$

75 Lembrando a relação de Stifel, determine em cada caso o número binomial x.

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = x$ b) $\binom{15}{2} + \binom{15}{3} = x$ c) $\binom{23}{13} + \binom{23}{12} = x$

d) $x = \binom{30}{11} + \binom{30}{10}$ e) $\binom{29}{11} - \binom{28}{11} = x$ f) $\binom{17}{10} - \binom{16}{9} = x$

g) $\binom{n}{n-4} + \binom{n}{n-3} = x$ h) $\binom{n-p}{p+1} + \binom{n-p}{p} = x$

i) $\binom{n}{n-5} + \binom{n}{n-6} = x$ j) $\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = x$

k) $\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1} = x$ l) $\binom{n-3}{n-7} - \binom{n-4}{n-8} = x$

m) $\binom{30}{11} + \binom{30}{18} = x$ n) $\binom{27}{9} + \binom{27}{19} = x$

o) $\binom{n-2}{n-8} + \binom{n-2}{7} = x$

76 Resolver as equações:

a) $\binom{12}{6} + \binom{12}{7} = \binom{13}{x}$ b) $\binom{17}{10} + \binom{17}{11} = \binom{18}{x}$

c) $\binom{20}{13} + \binom{20}{x} = \binom{21}{13}$ d) $\binom{32}{11} + \binom{32}{x} = \binom{33}{12}$

77 Resolver as equações:

a) $\binom{\binom{n}{n-1}}{2} = 6$ b) $\binom{\binom{n}{n-2}}{2} = 105$

c) $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 378$ d) $\binom{\binom{n-1}{2}}{2} = \binom{n-1}{2}$

78 Calcule cada uma das expressões, dando a resposta na forma de um único binomial :

a) $\binom{21}{13} - \binom{20}{12}$ b) $\binom{11}{3} - \binom{10}{3}$ c) $\binom{20}{12} - \binom{19}{11}$

d) $\binom{30}{7} + \binom{30}{8} + \binom{31}{9}$ e) $\binom{30}{21} - \binom{29}{20} + \binom{29}{22} + \binom{30}{23}$

f) $\binom{m-4}{p-3} + \binom{m-4}{p-2} + \binom{m-3}{p-1}$

79 Dados $\binom{m}{p} = 35$; $\binom{m+1}{p} = 70$, obter:

a) $\binom{m}{p-1}$ b) $\binom{m}{m-p+1}$

80 Se $\binom{m-1}{m-p} = 10$ e $\binom{m}{m-p} = 55$ obter $\binom{m-1}{p}$

81 Resolver as equações:

a) $\binom{m}{r+p} = \binom{m}{r-p}$, $p \neq 0$ b) $\binom{2m}{1} + \binom{2m}{2} + \binom{2m}{3} = 387m$

82 Resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} \binom{m}{n} = \binom{m}{n+1} \\ 4\binom{m}{n} = 5\binom{m}{n-1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \binom{x}{y} = \binom{x}{y+2} \\ \binom{x}{2} = 66 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \binom{n}{m} = \binom{n}{m+2} \\ \binom{n}{2} = 153 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \binom{m}{n} = \binom{m}{n+1} \\ \dfrac{m!}{(m-2)!} = 20 \end{cases}$

83 Determinar m e n sabendo que: $\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = 5:5:3$

84 Se A, B e C são números binomiais consecutivos tais que: 2B = 3A e B = C , determine o numerador comum de A , B e C.

85 Mostre as identidades:

a) $\frac{1}{p+2} \cdot \binom{n}{p} = \frac{p+1}{(n+1)\cdot(n+2)} \cdot \binom{n+2}{p+2}$

b) $\frac{1}{p+1} \cdot \binom{n}{p} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{p+1}$

86 Calcule:

a) $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} + \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+2}{p+2}$

b) $\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+2}{p+2} + \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-2}$

c) $\binom{n+1}{p} + \binom{n+2}{p+2} - \binom{n}{p-1} - \binom{n+1}{p+2}$

d) $\binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

87 Mostre as relações:

a) $n \cdot \binom{n}{r} = r \cdot \binom{n+1}{r+1} + \binom{n}{r+1}$

b) $\binom{n+2}{k} - 2 \cdot \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-2}$

c) $\binom{n+3}{k} - 3 \cdot \binom{n+2}{k} + 3 \cdot \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-3}$

88 Mostre as identidades:

a) $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$

b) $\binom{m-k}{s} \cdot \binom{m}{k} = \binom{m}{k+s} \cdot \binom{k+s}{k}$

c) $\binom{n-p}{2} = \binom{n}{2} + \binom{p}{2} + p - np$

89 Mostre as identidades:

a) $\binom{2n}{2} - (n^2 + 2n) = \frac{4!}{n^2 - 3n + 2} \cdot \binom{n}{4}$

b) $\binom{k}{p} \cdot \binom{p}{k-p} = \binom{k}{q} \cdot \binom{q}{k-p}$

c) $\binom{\binom{n}{2}}{2} - n\binom{n-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2}$

d) $\binom{m+n+p}{3} = \binom{m}{3} + \binom{n}{3} + \binom{p}{3} + (m+n) \cdot \binom{p}{2} + (m+p) \cdot \binom{n}{2} + (n+p) \cdot \binom{m}{2} + m \cdot n \cdot p$

e) $\binom{m \cdot n + 2}{2} = 1 + 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2} + n \cdot \binom{m+1}{2} + m \cdot \binom{n+1}{2}$

90 Calcule S nos casos:

a) $S = \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n}$

b) $S = \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+2}{k} + \ldots + \binom{n+m}{k}$

91 Mostre que:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] \cdot \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] \cdots \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n}$$

92 Calcule a soma: $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)$

93 Mostre que:

a) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

b) $\dfrac{\binom{4n}{2n}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (4n-1)}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)]^2}$

c) $\binom{n+2}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r-1} + 2 \cdot \binom{n}{r}$

d) $\binom{m}{k} \cdot \binom{m-k}{p-k} = \binom{m}{p} \cdot \binom{p}{k}$

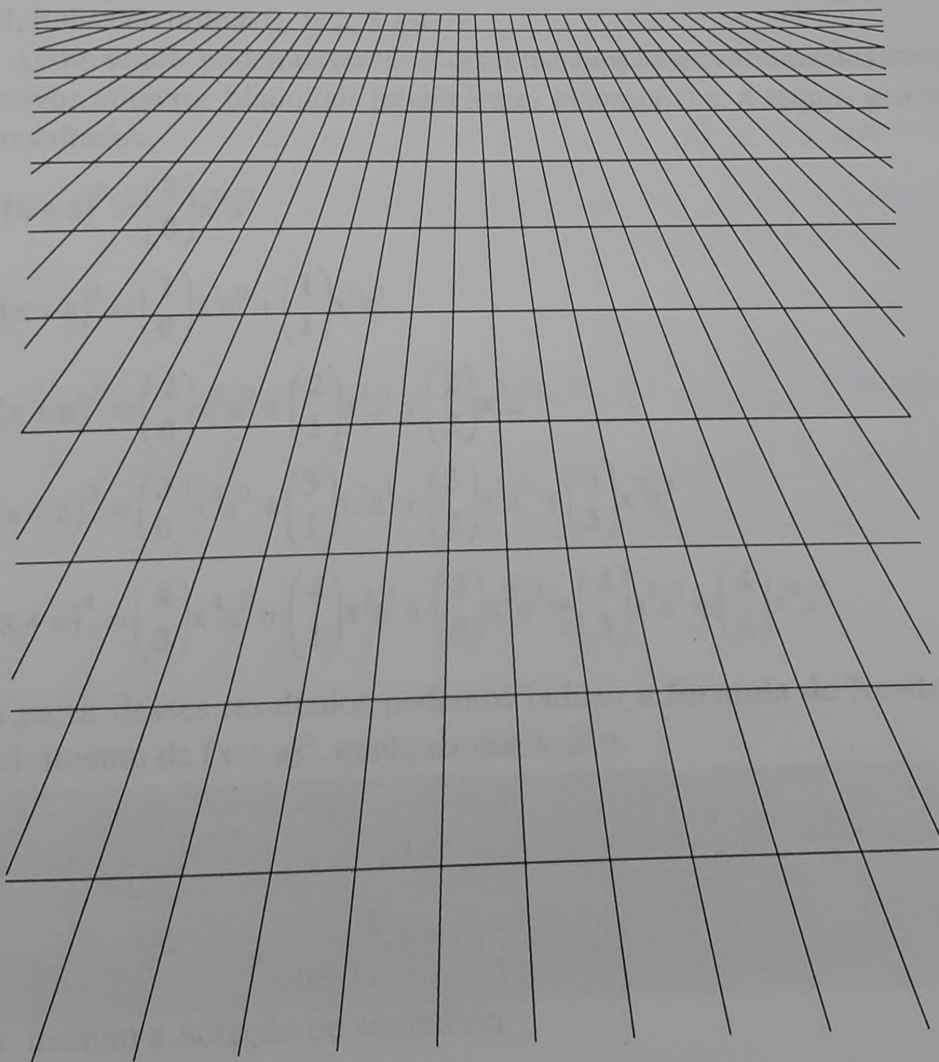
94 Mostre que:

a) $\binom{m}{1}\cdot\binom{m}{2}\cdot\binom{m}{3}\cdots\binom{m}{m}=\dfrac{(m!)^{m-1}}{[1!2!3!\ldots(m-1)!]^2}$

b) $\binom{m}{1}+2\cdot\dfrac{\binom{m}{2}}{\binom{m}{1}}+3\cdot\dfrac{\binom{m}{3}}{\binom{m}{2}}+\ldots+m\cdot\dfrac{\binom{m}{m}}{\binom{m}{m-1}}=\dfrac{m(m+1)}{2}$

c) $\binom{p}{q}+\binom{p-1}{q-1}+\ldots+\binom{p-q+1}{1}+\binom{p-q}{0}=\binom{p+1}{q}$

d) $\dfrac{\left[\binom{n+1}{r+1}-\binom{n}{r}\right]\cdot\binom{n-1}{r-1}}{\left[\binom{n}{r}\right]^2-\binom{n+1}{r+1}\cdot\binom{n-1}{r-1}}=r$

Binômio de Newton

A – Desenvolvimento do Binômio de Newton

a – Introdução

Damos o nome de **Binômio de Newton** a potências de binômios da forma $(\mathbf{x} + \mathbf{a})^n$ onde **x** e **a** são números reais quaisquer e **n** é um número natural.

Neste capítulo estudaremos uma regra prática para o desenvolvimento desses binômios, regra essa chamada de **Fórmula de Newton**. Para isso, vamos começar observando o desenvolvimento de $(x + a)^n$ quando n = 0, 1, 2, 3 e 4:

$$(x + a)^0 = \mathbf{1}$$
$$(x + a)^1 = \mathbf{1}x + \mathbf{1}a$$
$$(x + a)^2 = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}xa + \mathbf{1}a^2$$
$$(x + a)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2a + \mathbf{3}xa^2 + \mathbf{1}a^3$$
$$(x + a)^4 = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{4}x^3a + \mathbf{6}x^2a^2 + \mathbf{4}xa^3 + \mathbf{1}a^4$$

Olhando com cuidado esses desenvolvimentos, podemos perceber que os coeficientes são exatamente os números binomiais do triângulo aritmético de Pascal, linhas de ordem 0, 1, 2, 3 e 4.

Assim sendo, podemos escrever esses mesmos desenvolvimentos usando os respectivos números binomiais (coeficientes binomiais) e, a sequir, generalizar esses resultados:

$$(x+a)^0 = \binom{0}{0}x^0a^0$$

$$(x+a)^1 = \binom{1}{0}x^1a^0 + \binom{1}{1}x^0a^1$$

$$(x+a)^2 = \binom{2}{0}x^2a^0 + \binom{2}{1}x^1a^1 + \binom{2}{2}x^0a^2$$

$$(x+a)^3 = \binom{3}{0}x^3a^0 + \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1a^2 + \binom{3}{3}x^0a^3$$

$$(x+a)^4 = \binom{4}{0}x^4a^0 + \binom{4}{1}x^3a^1 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}x^1a^3 + \binom{4}{4}x^0a^4$$

A partir desses resultados podemos induzir a **fórmula de Newton** para o desenvolvimento de $(x + a)^n$, qualquer que seja n:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-2}x^2a^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{n}x^0a^n$$

ou, usando a notação de somatória:

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$$

Observações:

1ª) Os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ são os elementos da linha de ordem n do triângulo de Pascal.

2ª) No resultado obtido, o desenvolvimento de $(x + a)^n$ foi feito segundo a ordem decrescente dos expoentes de x: x^n, x^{n-1}, ..., x^0. Evidentemente, caso exista interesse, podemos escrever esse desenvolvimento em ordem inversa, ou seja, começando com $\binom{n}{n} x^n a^o$ e terminando com $\binom{n}{o} x^n a^o$. Neste livro, salvo aviso em contrário, faremos sempre do 1º modo.

*3º) Os expoentes de **x** decrescem de **n** até **0** e os de **a** crescem de **0** até **n**. Note que, em cada termo, a soma dos expoentes de **x** e de **a** é sempre igual a **n**.*

4º) O desenvolvimento de $(x + a)^n$ tem n + 1 termos, isto é, de $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$.

5º) No caso extremo em que n = 0, como já vimos, temos: $(x+a)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 a^0$

b – Demonstração

Demonstraremos que tal fórmula é válida para qualquer n, usando o Princípio da indução finita (PIF).

TESE:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

1ª Parte: Verificação para n = 1

1º membro = $(x + a)^1 = x + a$

2º membro = $\binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1 = x + a$

portanto, 1º membro = 2º membro.

2ª Parte:

Hipótese de indução (n = k)

$$(x+a)^k = \binom{k}{0} x^k a^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} a^1 + \binom{k}{2} x^{k-2} a^2 + \ldots + \binom{k}{k} x^0 a^k$$

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$$

Observações:

1ª) Os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ são os elementos da linha de ordem n do triângulo de Pascal.

2ª) No resultado obtido, o desenvolvimento de $(x + a)^n$ foi feito segundo a ordem decrescente dos expoentes de x: x^n, x^{n-1}, ..., x^0. Evidentemente, caso exista interesse, podemos escrever esse desenvolvimento em ordem inversa, ou seja, começando com $\binom{n}{n} x^n a^o$ e terminando com $\binom{n}{o} x^n a^o$. Neste livro, salvo aviso em contrário, faremos sempre do 1º modo.

*3º) Os expoentes de **x** decrescem de **n** até **0** e os de **a** crescem de **0** até **n**. Note que, em cada termo, a soma dos expoentes de **x** e de **a** é sempre igual a **n**.*

4º) O desenvolvimento de $(x + a)^n$ tem n + 1 termos, isto é, de $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$.

5º) No caso extremo em que n = 0, como já vimos, temos: $(x+a)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 a^0$

b – Demonstração

Demonstraremos que tal fórmula é válida para qualquer n, usando o Princípio da indução finita (PIF).

TESE:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

1ª Parte: Verificação para n = 1

1º membro = $(x + a)^1 = x + a$

2º membro = $\binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1 = x + a$

portanto, 1º membro = 2º membro.

2ª Parte:

Hipótese de indução (n = k)

$$(x+a)^k = \binom{k}{0} x^k a^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} a^1 + \binom{k}{2} x^{k-2} a^2 + \ldots + \binom{k}{k} x^0 a^k$$

Tese de indução (n = k + 1)

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1}a^0 + \binom{k+1}{1}x^k a^1 + \binom{k+1}{2}x^{k-1}a^2 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}x^0 a^{k+1}$$

demonstração da 2ª parte:

1º membro da tese $= (x+a)^{k+1} = (x+a)^k \cdot (x+a) =$

$$= (x+a)\cdot\left[\binom{k}{0}x^k a^0 + \binom{k}{1}x^{k-1}a^1 + \binom{k}{2}x^{k-2}a^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}xa^{k-1} + \binom{k}{k}x^0 a^k\right] =$$

distribuitiva do **x**

$$= \begin{cases} \binom{k}{0}x^{k+1}a^0 + \binom{k}{1}x^k a + \binom{k}{2}x^{k-1}a^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}x^2a^{k-1} + \binom{k}{k}x\,a^k \\ \binom{k}{0}x^k a + \binom{k}{1}x^{k-1}a^2 + \binom{k}{2}x^{k-2}a^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}x\,a^k + \binom{k}{k}x^0a^{k+1} \end{cases}$$

distribuitiva de **a**

somando os termos semelhantes, temos:

$$= \binom{k}{0}x^{k+1}a^0 + \left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]x^k a + \left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]x^{k-1}a^2 + \left[\binom{k}{2}+\binom{k}{3}\right]x^{k-2}a^3 +$$

$$\ldots + \left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]x\cdot a^k + \binom{k}{k}x^0 a^{k+1}$$

no primeiro termo substituimos $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ no último, $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$ e nos demais termos aplicamos a relação de Stifel:

$\binom{k}{0}+\binom{k}{1} = \binom{k+1}{1}$, $\binom{k}{1}+\binom{k}{2} = \binom{k+1}{2}$, e assim por diante.

$$= \binom{k+1}{0}x^{k+1}a^0 + \binom{k+1}{1}x^k a + \binom{k+1}{2}x^{k-1}a^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}\cdot x\cdot a^k + \binom{k+1}{k+1}x^0a^{k+1}$$

2º membro da tese.

Fica, assim, demonstrada a Fórmula de Newton para o desenvolvimento de $(x+a)^n$, $y \in \mathbb{N}^*$ e $x, a \in \mathbb{R}$.

A.1 – Potência da diferença $(x - a)^n$

A partir do resultado anterior, vamos desenvolver o binômio $(x - a)^n$. Para isso basta fazer: $(x-a)^n = [x+(-a)]^n =$

$$= \binom{n}{0} x^n (-a)^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} (-a)^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} (-a)^2 + \ldots + \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot (-a)^p +$$

$$\ldots + \binom{n}{n-1} x \cdot (-a)^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 \cdot (-a)^n$$

lembre-se: $(-a)^p = (-1)^p \cdot a^p$ e o sinal resultante de $(-1)^p$ é (+) se p for par e (–) se p for ímpar.

$$(x-a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 - \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 - \ldots + (-1)^p \binom{n}{p} x^{n-p} a^p +$$
$$\ldots + (-1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n$$

ou, na forma de somatória:

$$(x-a)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$$

Observação: *no desenvolvimento de* $(x - a)^n$ *os sinais dos termos vão se alternando a partir do 1º termo que é positivo: (+), (–), (+), (–), etc. Note, também, que o termo* $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$ *é precedido de (+) se p é par e (–) se p é ímpar.*

Exemplos:

Vamos mostrar o desenvolvimento de dois binômios:

a) $(x+a)^4 = \binom{4}{0} x^4 a^0 + \binom{4}{1} x^3 a^1 + \binom{4}{2} x^2 a^2 + \binom{4}{3} x^1 a^3 + \binom{4}{4} x^0 a^4$

que, simplificando, fica:

$= x^4 + 4x^3 a + 6x^2 a^2 + 4xa^3 + a^4$.

b) $(a-b)^5 = \binom{5}{0} a^5 \cdot (-b)^0 + \binom{5}{1} a^4 (-b)^1 + \binom{5}{2} a^3 \cdot (-b)^2 + \binom{5}{3} a^2 (-b)^3 +$
$+ \binom{5}{4} a^1 (-b)^4 + \binom{5}{5} a^0 (-b)^5$

e, simplicando temos:

$= a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$

A.2 – Termo geral do desenvolvimento de $(x + a)^n$

Chamando de T_1 o primeiro termo do desenvolvimento, de T_2 o segundo e assim por diante até T_{n+1}, temos (lembre-se: expoentes de x em ordem decrescente):

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0} x^n a^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1} x^{n-1} a}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2} x^{n-2} a^2}_{T_3} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{p} x^{n-p} a^p}_{T_{p+1}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\binom{n}{n-1}x^1a^{n-1}}_{T_n} + \underbrace{\binom{n}{n}x^0a^n}_{T_{n+1}}$$

Deste modo, chamaremos de termo geral do desenvolvimento de $(x + a)^n$ ao termo :

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p \qquad (p = 0, 1, 2, ..., n)$$

termo de ordem p+1.

Exemplo:

Sem desenvolver o binômio, determinar o 5° termo do desesenvolvimento de $(y + 2)^{11}$

$$\text{Compare : } \begin{cases} (y+2)^{11} \\ (x+a)^n \end{cases}$$

$$\text{Temos: } \begin{cases} 5^{\circ} \text{ termo} \rightarrow T_5 = T_{p+1} \Rightarrow p = 4 \\ n = 11 \\ x \leftrightarrow y \\ a \leftrightarrow 2 \end{cases}$$

$$\text{termo geral} = T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$$

Substituido os valores dados, temos :

$$T_5 = \binom{11}{4}x^{11-4} \cdot 2^4 = \frac{11!}{7! \cdot 4!} \cdot 16 \cdot y^7$$

Simplificando, temos :

$T_5 = 5280\ y^7$ que é o 5° termo do desenvolvimento de $(y + 2)^{11}$ segundo as potências y com expoentes decrescentes (como já convencionamos anteriormente).

A.3 – Aplicação da relação de Fermat no desenvolvimento de um binômio.

Issac Newton (1646 - 1727) mostrou como desenvolver diretamente $(x + a)^n$ sem antes calcular $(x + a)^{n-1}$.

Embora na resolução de exercícios raramente se use este método, ele tem interesse teórico e histórico. O processo se resume em usar a relação de Fermat para achar o termo T_{p+2} a partir do termo anterior, T_{p+1}. Observe:

$$(x+a)^n \rightarrow \begin{cases} T_{p+2} = \binom{n}{p+1}x^{n-p-1}a^{p+1} \\ T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p \end{cases}$$

Como desejamos obter $\binom{n}{p+1}$ a partir de $\binom{n}{p}$, podemos fazer:

$$\frac{\binom{n}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{n!}{(p+1)!\cdot(n-p-1)!}\cdot\frac{p!\cdot(n-p)!}{n!} = \frac{n-p}{p+1}$$

e, portanto, temos : $\binom{n}{p}\cdot\frac{n-p}{p+1} = \binom{n}{p+1}$

Observe:

$$(x+a)^n = \ldots + \overbrace{\binom{n}{p}x^{n-p}a^p}^{T_{p+1}} + \overbrace{\binom{n}{p+1}x^{n-p-1}a^{p+1}}^{T_{p+2}} + \ldots$$

$$\cdot\frac{n-p}{p+1} = \cdot\frac{(\text{expoente de } x)}{(1+\text{expoente de } a)}$$

Façamos, como exemplo, o desenvolvimento de $(x + a)^4$:

$T_1 = \binom{4}{0}x^4a^0 = 1\cdot x^4\cdot 1 = x^4$ (lembre-se: $\binom{n}{0} = 1$)

$\binom{4}{1} = \binom{4}{0}\cdot\frac{4}{1+0} = 1\cdot\frac{4}{1} = 4$ e, portanto:

$T_2 = \binom{4}{1}x^3a^1 = 4x^3a$

$\binom{4}{2} = \binom{4}{1}\cdot\frac{3}{1+1} = 4\cdot\frac{3}{2} = 6$, portanto:

$T_3 = \binom{4}{2}x^2a^2 = 6x^2a^2$

$\binom{4}{3} = \binom{4}{2}\cdot\frac{2}{1+2} = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$

$T_4 = \binom{4}{3}x^1a^3 = 4xa^3$

$\binom{4}{4} = \binom{4}{3}\cdot\frac{1}{1+3} = 4xa^3$

$$T_5 = \binom{4}{4} \cdot x^0 a^4 = a^4$$

Assim sendo, temos :

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3 a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

Observações :

1ª) Este método nos permite desenvolver, por exemplo, $(x + a)^{62}$ sem conhecer os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^{61}$, pois, se estes fossem conhecidos, bastava aplicar a relação de Stifel : da linha 61 obtemos a linha 62 do triângulo de Pascal.

2ª) Para agilizar o desenvolvimento de um binômio usando a relação de Fermat podemos, evidentemente, usar as seguintes propriedades já conhecidas:

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n \text{ e } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$ *(coeficientes binomiais complementares).*

No exemplo acima, temos: $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1,\ \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4,\ \binom{4}{2} = 6.$

A.4 – Somas das potências dos números inteiros positivos

Adotaremos a sequinte nomenclatura:

$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$ (soma dos **n** primeiros números inteiros positivos)

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ (soma dos quadrados dos **n** primeiros números inteiros positivos)

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ (soma dos cubos)

$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$, e assim por diante.

a) **Calculo de S_1**

Para calcular Sn vamos, sempre, usar o desenvolvimento de $(x + 1)^{n+1}$. Assim sendo, utilizaremos neste caso o desenvolvimento de $(x + 1)^2$ que é a seguinte identidade:

$$(x + 1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$$

Como uma identidade é uma igualdade verdadeira para qualquer valor atribuído a **x**, fazemos:

$$(x + 1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{lcrcl}
x = 1 & \Rightarrow & \cancel{2^2} & = & 1^2 + 2\cdot 1 + 1 \\
x = 2 & \Rightarrow & \cancel{3^2} & = & \cancel{2^2} + 2\cdot 2 + 1 \\
x = 3 & \Rightarrow & \cancel{4^2} & = & \cancel{3^2} + 2\cdot 3 + 1 \\
x = 4 & \Rightarrow & \cancel{5^2} & = & \cancel{4^2} + 2\cdot 4 + 1 \\
..... & ..... & \cancel{...} & ... & \cancel{...}.......... \\
..... & ..... & \cancel{...} & ... & \cancel{...}.......... \\
x = n & \Rightarrow & (n+1)^2 & = & \cancel{n^2} + 2\cdot n + 1 \\
\hline
 & & (n+1)^2 & = & 1^2 + 2\cdot(1+2+3+...+n) + (1+1+...+1) \\
 & & (n+1)^2 & = & 1 + 2.S_1 + n
\end{array}$$

somando membro a membro

$2S_1 + (n+1) = (n+1)^2$
$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1)$
$2S_1 = (n+1)\cdot[(n+1) - 1]$
$2S_1 = (n+1)\cdot n$

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

ou seja:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

b) **Cálculo de S_2**

Para o cálculo de $S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

utilizaremos o resultado anterior (S_1) e procederemos de modo análogo.

$$(x+1)^3 \equiv x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$x = 1$	$\Rightarrow$	2^3	$=$	$1^3 + 3\cdot1^2 + 3\cdot1 + 1$	somando membro a membro
$x = 2$	$\Rightarrow$	3^3	$=$	$2^3 + 3\cdot2^2 + 3.2 + 1$	
$x = 3$	$\Rightarrow$	4^3	$=$	$3^3 + 3\cdot3^2 + 3\cdot3 + 1$	
$x = 4$	$\Rightarrow$	5^3	$=$	$4^3 + 3\cdot4^2 + 3\cdot4 + 1$	
.....	.....	....	...	....	
.....	.....	....	...	....	
$x = n$	$\Rightarrow$	$(n+1)^3$	$=$	$n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$	
		$(n+1)^3$	$=$	$1^3 + 3\cdot S_2 + 3S_1 + n$	

Substituindo $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ e isolando S_2, temos:

$$(n+1)^3 = (n+1) + 3S_2 + 3.\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 3S_2 = (n+1)\cdot\left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 3S_2 = (n+1)\left[\frac{2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n}{2}\right]$$

$$3S_2 = (n+1).\frac{2n^2 + n}{2} = \frac{(n+1).n(2n+1)}{2} \text{ e, portanto:}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Analogamente e sempre recorrendo às somas anteriores, podemos calcular S3, S4, S5, etc...

Exercícios

95 Usando a fórmula de Newton, escreva o desenvolvimento dos seguintes binômios e simplifique o que for possível (se necessário, consulte o triângulo dos valores de Pascal):

a) $(x+a)^6$ b) $(a-y)^4$ c) $(x-2)^7$

d) $(2x+3)^5$ e) $(x^2-3x)^3$ f) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^4$

g) $(-x-2y)^5 = [-(x+2y)]^5 = -(x+2y)^5$

96 Neste exercício apresentamos os desenvolvimentos de alguns binômios, usando a notação de somatória. Desenvolva tais somatórias e, a seguir, simplifique:

a) $\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}a^{4-i}\cdot b^i$ b) $\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}3^{5-i}\cdot x^i$ c) $\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\cdot(3x)^{3-i}\cdot 1^i$

d) $\sum_{p=0}^{8}\binom{8}{p}x^{8-p}\cdot(-1)^p$ e) $\sum_{p=0}^{6}\binom{6}{p}(x^2)^{6-p}\cdot(x^{-1})^p$

97 Escreva em forma de somatória o desenvolvimento de cada binômio dado (observe o modelo do item (a)):

a) $(x+a)^{12} = \sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}x^{12-i}\cdot a^i$ b) $(a-b)^9$ c) $(5x+6)^{16}$ d) $(x^3-x^{-3})^{14}$

e) $(a+1)^{20}$ f) $(x-1)^{11}$ g) $(1-x^2)^{15}$ h) $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{18}$ i) $(2-6x^{-1})^{30}$

98 Escreva, em cada caso, a que binômio corresponde a somatória dada (observe o modelo):

a) $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}a^{10-i}\cdot x^i = (a+x)^{10}$ b) $\sum_{i=0}^{13}\binom{13}{i}x^{13-i}\cdot 2^i$ c) $\sum_{i=0}^{16}(-1)^i\binom{16}{i}a^{16-i}\cdot 3^i$

d) $\sum_{i=0}^{20}(-1)^{20-i}\binom{20}{i}x^{20-i}\cdot 1^i$ e) $\sum_{p=0}^{8}\binom{8}{p}x^{8-p}$ f) $\sum_{p=0}^{25}(-1)^{25-p}\binom{25}{p}a^p$

g) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^{n-j}\cdot 3^j$ h) $\sum_{j=0}^{200}(-1)^j\binom{200}{j}5^{200-j}\cdot 4^j$

i) $\sum_{i=0}^{12}(-1)^i\binom{12}{i}3^{12-i}\cdot 3^i$ j) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}6^{n-i}$ k) $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}7^i$

99 Passe cada desenvolvimento de binômio dado para a forma de somatória (observe o modelo):

a) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}a^{5-i}\cdot b^i$

b) $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

c) $-m^3 + 3m^2n - 3mn^2 + n^3$

d) $a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16$

e) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

f) $7^9 + 9\cdot7^8\cdot2 + 36\cdot7^7\cdot2^2 + \ldots + 9\cdot7\cdot2^8 + 2^9$

g) $6^{14} - 14\cdot6^{13}\cdot6 + 91\cdot6^{12}\cdot6^2 - \ldots - 14\cdot6\cdot6^{13} + 6^{14}$

h) $-\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n+1}.3 - \binom{n}{2}2^{n-2}.3^2 + \ldots - \binom{n}{n-1}2.3^{n-1} + \binom{n}{n}3^n$

($n \in N$ | n é impar)

i) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

100 Escreva os desenvolvimentos do exercício anterior na forma de binômios.

101 Passe as seguintes somatórias para a forma de binômio (preste atenção ao fato de que as somas estão "incompletas", observe o modelo.

a) $\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}x^{5-i}.a^i = \sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}x^{5-i}.a^i + \binom{5}{0}x^5a^0 - \binom{5}{0}x^2a^0 = (x+a)^5 - x^5$

b) $\sum_{i=1}^{6}(-1)^i\binom{6}{i}x^{6-i}$

c) $\sum_{i=1}^{8}\binom{9}{i}a^{9-i}$

d) $\sum_{i=0}^{17}\binom{17}{i}3^{17-i}\cdot2^i$

e) $\sum_{i=1}^{24}(-1)^i\binom{25}{i}9^{25-i}\cdot8^i$

f) $\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}\cdot1^i$

102 Determine o termo de ordem (p + 1) do desenvolvimento dos seguintes binômios (simplifique o que for possível):

a) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{15}$ **Resolução:** $T_{p+1} = \binom{15}{p}\cdot\left(x^2\right)^{15-p}\cdot\left(-x^{-1}\right)^p =$

$$= \binom{15}{p}\cdot x^{30-2p}\cdot(-1)^p\cdot\left(x^{-p}\right) \Rightarrow T_{p+1} = \binom{15}{p}\cdot(-1)^p\cdot x^{30-3p}$$

b) $(x + a)^{10}$ c) $(x - 1)^{20}$ d) $(2 - 6x)^9$ e) $\left(\frac{2x}{y} + 3y\right)^6$

f) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^m$ g) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{12}$ h) $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{17}$

103 Determine a ordem (posição) do termo central (termo médio) dos desenvolvimentos dos seguintes binômios:

Lembre-se: o desenvolvimento de $(x + a)^n$ tem $(n + 1)$ termos.

a) $(x + a)^4$ **Resolução:** $(x+a)^4 = \underbrace{T_1 + T_2}_{2\ \text{termos}} + T_3 + \underbrace{T_4 + T_5}_{2\ \text{termos}}$ e, portanto, o termo central é o T_3.

b) $(x - y)^{10}$ c) $(a + b)^5$ d) $(a - b)^6$ e) $(x + y)^{98}$

f) $(x - a)^n$, para $n \in \mathbf{N}^* \mid n$ é par.

104 Determine a ordem dos dois termos centrais dos desenvolvimentos dos seguintes binômios:

a) $(x - y)^5$ **Resolução:** $(x - y)^5 = \underbrace{T_1 + T_2}_{2\ \text{termos}} + T_3 + T_4 + \underbrace{T_5 + T_6}_{2\ \text{termos}}$ e, portanto, os termos centrais são o T_3 e T_4.

b) $(a + b)^3$ c) $(x + a)^7$ d) $(x + a)^9$ e) $(x + 1)^{47}$

f) $(a - b)^m$, para m ímpar e $m \geq 3$.

105 Sem desenvolver os binômios, determine o termo que se pede em cada caso:

a) $\left(\sqrt{x} - x\right)^{13}$: determine T_8 (oitavo termo)

Resolução: $T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p$

$$\left\{\begin{array}{l} p+1=8 \Rightarrow p=7 \\ n=13 \\ x \to \sqrt{x} \\ a \to -x \end{array}\right\} \Rightarrow T_8 = \binom{13}{7} \cdot \left(x^{1/2}\right)^{13-7} \cdot (-x)^7$$

$$T_8 = \binom{13}{7} \cdot x^3 \cdot (-1)^7 \cdot x^7 \Rightarrow \text{Resp: } T_8 = -\binom{13}{7} \cdot x^{10}$$

b) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{15}$: determinar o 11º termo (T_{11}), o 16º (T_{16}) e o 1º (T_1).

c) $(2 - 6x)^8$: determinar o termo central.

d) $\left(\frac{2x}{y} + 3y\right)^{11}$: determinar os dois termos centrais.

e) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{12}$: determinar o 3º termo

f) $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{17}$: determinar o 16º termo.

g) $(x + a)^{10}$: determinar o termo de ordem $(k + 1)$. $(0 \le k \le 10)$

h) $(x - y)^{13}$: determinar o termo de ordem k $(1 \le k \le 14)$

i) $(x - 2)^{18}$: determinar o termo de ordem $(k - 1)$ $(2 \le k \le 20)$

j) $(x - x^{-2})^m$: determinar o termo de ordem $(k + 3)$ $(-2 \le k \le m - 2)$

106

Determine o termo em x^{-1} no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{12}$

Resolução: O termo geral do desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{12}$ é:

$$T_{p+1} = \binom{12}{p} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{12-p} \cdot \left(-x^{-3}\right)^p = \binom{12}{p} \cdot (-1)^p \cdot x^{\frac{12-p}{2}} \cdot x^{-3p} \Rightarrow$$

$$T_{p+1} = \binom{12}{p} \cdot (-1)^p \cdot x^{\frac{12-7p}{2}}$$

Para que o expoente de **x** seja -1, temos:

$$\frac{12 - 7p}{2} = -1 \Rightarrow 12 - 7p = -2 \Rightarrow 7p = 14 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow$$

$$T_3 = \binom{12}{2} \cdot (-1)^2 \cdot x^{\frac{12-14}{2}} \Rightarrow T_3 = \frac{12!}{2!10!} \cdot 1 \cdot x^{-1}$$

Resposta: é o termo $T_3 = 66x^{-1}$

107

Determine o termo em x^6 no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{17}$, sem desenvolvê-lo.

108 Chama-se **termo independente de x** do desenvolvimento de um binômio na variável x, àquele termo em que se tem x^0 pois como $x^0 = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deixamos de escrever a variável x nesse termo, isto é, o **x "desaparece"**. Nessas condições, determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{15}$.

109 Qual a posição do termo que possui a^7 no desenvolvimento do binômio $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$?

110 Que posição ocupa o termo que tem a e b com o mesmo expoente na expansão de $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$?

111 Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio $(2x+y)^3$, **sem desenvolvê-lo**.

Resolução: o desenvolvimento do binômio $(2x+y)^3$ é uma função nas variáveis x e y, ou seja: $f(x, y) = (2x+y)^3$ **(1)**

Se pudessemos desenvolvê-lo, teriamos:

$$f(x, y) = \binom{3}{0}(2x)^3 y^0 + \binom{3}{1}(2x)^2 y^1 + \binom{3}{2}(2x)^1 y^2 + \binom{3}{3}(2x)^0 y^3$$

$$f(x, y) = \mathbf{8}x^3 + \mathbf{12}x^2y + \mathbf{6}xy^2 + \mathbf{1}y^3 \Rightarrow \mathbf{(2)}$$

e a soma dos seus coeficiêntes é: S.C.= 8 +12 + 6 + 1 = 27

Evidentemente, essa soma pode ser calculada fazendo-se $x = y = 1$ na função f(x,y) tanto na expressão **(1)**, como na expressão **(2)**.

Observe:

(3) $f(x,y) = (2x + 3)^3 \Rightarrow \quad f(1,1) = (2.1+1)^3 \Rightarrow \quad f(1,1) = 3^3 = 27$

(4) $f(x, y) = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + 1y^3 \Rightarrow$

$$f(1, 1) = 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^3 = 8 + 12 + 6 + 1 = 27$$

Concluímos, portanto, que para calcular a soma dos coeficientes (S.C) do denvolvimento de um binômio f(x, y) basta substituir suas variáveis por 1 (veja expressão **(3)**)

$$\text{S.C.} = f(1,1)$$

112 Calcule a soma dos coeficientes dos desenvolvimentos dos seguintes binômios:

a) $(2x + 3a)^{10}$ b) $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ c) $(a + b)^n, n \in N^*$

d) $(a - b)^m, m \in N^*$ e) $\left(\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ f) $\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{6}\right)^5$

g) $\sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} (4x)^{8-i} (6)^i$ h) $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot a^{m-i} \cdot x^i \quad (m \in N^*)$

i) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot x^{n-i} \cdot y^i \; (n \in N^*)$

113 Determine o número natural **n** sabendo que a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(3x + 5y^2)^n$ é igual $256 \cdot 2^n$.

114 (MACK -72) Determine o número de termos racionais que tem o desenvolvimento de $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{100}$

115 Ache o termo médio da expansão binomial de $\left(\frac{a}{x} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}$

116 Ache o termo médio da expansão binomial de $\left(a^{-2}\sqrt{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m$ sabendo que a razão entre o quinto e o terceiro termo é 14:3.

117 Simplifique a expressão $\left(\frac{a+1}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{a-1}{a - a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$ e determine o termo independente de a.

118 Na expansão de $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^m$ os coeficientes do quarto e do décimo terceiro termos são iguais. Determine o termo independente de x.

119 Determine o 13º termo da expansão do binômio $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$ sabendo que o coeficiente binomial do 3º termo é 105.

120 A diferença entre os expoentes de dois binômios é 3 e a soma dos coeficientes binômiais dos dois binômios é 144. Quais são esses expoentes?

121 Utilizando o desenvolvimento $(x + 1)^4$ e conhecendo $S_1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ e $S_2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, calcule a soma dos cubos dos n primeiros números inteiros positivos: $S_3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

122 Utilizando as propriedades das somatórias e conhecendo os resultados de S_1, S_2 e S_3, calcule o valor das seguintes somas:

a) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + 1)$

Resolução: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + 1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1) =$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6n}{6} = \frac{n[(n+1)(2n+1) + 6]}{6} =$$

$$\frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$$

b) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} (3i - i^2)$ c) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + 2i - 1)$ d) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i - i^3)$

e) $S(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)$

Resolução: $S(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+i) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)+n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1).[2n+1+1]}{6}=\frac{n(n+1).[2.(n+1)]}{6}=\frac{n(n+1)^2}{3}$$

f) $S(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+2)$
g) $S(n) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + ... + n(n+2)$
h) $S(n) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 10 + ... + (2n-1) \cdot (2n+2)$

Exercícios Suplementares

123 Desenvolver os seguintes binômios:

a) $(a-2x)^7$ b) $\left(\frac{x}{2}+2\right)^6$ c) $(3x+y)^5$ d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$

e) $\left(\frac{x}{3}-3y^2\right)^6$ f) $\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^5-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)^5$

124 Calcular com 6 casas decimais o valor de:

a) $1{,}03^5$ b) $1{,}05^6$ c) $1{,}04^8$

125 Calcular:

a) O 28º termo da expansão de $(x+a)^{30}$
b) O 4º termo da expansão de $(x^2-x)^{17}$
c) O 7º termo do desenvolvimento de $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}$
d) O 23º termo da expansão de $\left(x^2-\frac{b}{x}\right)^{25}$
e) O 8º termo da expansão de $\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{8}\right)^{10}$

126 Ache a soma dos coeficientes do desenvolvimento de:

a) $(x+y)^{12}$ b) $(3x-2y)^{27}$ c) $(5x+3y)^{11}$

127 Determine o coeficiente de x^{12} do desenvolvimento de $(x^2+2x)^{10}$

128 Determine o coeficiente de x^3 do desenvolvimento de $\left(2x-\frac{1}{4x^2}\right)^{12}$

129 Determine o termo médio do desenvolvimento de $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3}{2a}\right)^6$

130 Determinar o termo independente de x do desenvolvimento do binômio dado nos casos:

a) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ b) $\left(x - \frac{1}{x^3}\right)^{28}$ c) $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{3}{2x}\right)^9$ d) $\left(x - \frac{1}{3x}\right)^9$

131 O coeficiente binomial do terceiro termo do desenvolvimento do binômio $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ excede em 44 o coeficiente binomial do segundo termo. Determine o termo independente de x.

132 A soma do terceiro com o quinto termos da expansão de $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ é igual a 135 e a soma dos três últimos coeficientes binômias é 22. Determine x.

133 O terceiro termo do desenvolvimento do binômio $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ é 240. Determine x.

134 Determine x no binômio $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}} + a\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^5$ sabendo que o quarto termo da expansão é $56a^{5,5}$.

135 O quarto termo do desenvolvimento de $\left[\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x + 1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6$ é 200. Determine x.

136 A diferença entre 9 vezes o terceiro termo e o quinto termo do desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^n$ é 240 e a diferença entre o logaritmo de 3 vezes o coeficiente binomial do quarto termo e o logaritmo do coeficiente binomial do segundo termo é 1. Determine x.

137 O terceiro termo do desenvolvimento de $(x + x^{\log x})^5$ é 10^6. Determine x.

138 O terceiro termo do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\log\sqrt{x}}\right)^9$ é 36.000. Determine x.

139 O quarto termo do desenvolvimento do binômio $\left(10^{\log\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[\log x]{10}}\right)^7$ é 3.500.000. Determine x.

140 Sabendo que o nono termo do desenvolvimento do binômio

$\left[\frac{\sqrt{10}}{\left(\sqrt{x}\right)^{5\log x}}+x\cdot\sqrt[2\log x]{x}\right]^{10}$ é 450, determine x.

141 O sexto termo do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\log x}\right)^8$ é 5.600. Determine x.

142 O sexto termo da expansão de $\left[\sqrt{2^{\log\left(10-3^x\right)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right]^n$ é 21 e os coeficientes binomiais do segundo, terceiro e quarto termos são, respectivamente o primeiro, terceiro e quinto termos de uma progressão aritmética. Determine x.

143 O quarto termo da expansão binomial de $\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{1}{2}\log\left(6-\sqrt{8x}\right)}+\sqrt[6]{\frac{5^{\log(x-1)}}{25^{\log 5}}}\right]^n$ é 16,8 e $\frac{14}{9}$ do coeficiente binomial do terceiro termo e os coeficientes binomiais do quarto e quinto termos formam uma progressão geométrica. Determine x.

144 Determine o termo em x^5 do desenvolvimento de $\left(x\sqrt{x}+\sqrt[-3]{x}\right)^m$, sabendo que a soma dos coeficientes binomiais é 128.

145 O quarto termo do desenvolvimento de $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$ é 20m. Se o coeficiente binomial dele é igual a 5 vezes o do segundo termo, determine x.

146 A diferença entre o quarto e o sexto termos da expansão de $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}} + \frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^m$ é 56 e o coeficiente binomial do terceiro termo é m + 20. Determine x.

147 Do desenvolvimento de $\left(\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ sabemos que um termo menos o anterior é 30 e o expoente da sua parte literal é a metade do expoente do anterior. Determine x.

148 Sabendo que a razão entre os termos T_7 e T_{n-5} do desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ é $\frac{1}{6}$, determine n.

149 A soma dos coeficientes do primeiro, segundo e terceiro termos do desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^m$ é igual a 46. Determine o termo independente de x.

150 Para que valor de n os coeficientes do segundo, terceiro e quarto termos do desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ formam uma progressão aritmética?

151 Os coeficientes do quinto, sexto e sétimo termos do desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ formam uma P.A.. Determine n.

152 Achar a condição que deve obedecer a e n para que o desenvolvimento de $(1 + a)^n$ tenha dois termos consecutivos iguais. Pode esse desenvolvimento ter 3 termos consecutivos iguais?

153 Determine o maior termo do desenvolvimento de:

a) $(1 + 4x)^8$ para $x = \frac{1}{3}$

b) $(x + y)^{28}$ para x = 9 e y = 4

c) $(2x + 3)^n$ para $x = \frac{5}{2}$ e n = 15

154 Para qual valor de k o termo T_{k+1} é o maior termo do desenvolvimento do binômio $\left(1 + \sqrt{3}\right)^{100}$.

155 Determine uma relação entre r e n para que os coeficientes dos termos T_{r+3} e T_{2r-3} do desenvolvimento de $(1 + x)^{2n}$ sejam iguais.

156 Ache o termo médio do desenvolvimento de $(1 + 2x)^{2m}$.

157 Considere-se o desenvolvimento de $\left(2\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^n$ sendo n um inteiro positivo. Qual é o menor valor de n para que o expoente de x no 13° termo seja um número inteiro positivo? Escrever, a seguir, esse termo.

158 Determine n e o sétimo termo do desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ para que esse sétimo termo seja em x^3.

159 Cada coeficiente do desenvolvimento de $x(1+x)^n$ é divisível pelo expoente de x do mesmo termo. Demonstre que a soma dos coeficientes é $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$:

160 Determinar o coeficiente de x^m no desenvolvimento da expressão $(1 + x)^k + (1 + x)^{k+1} + ... + (1 + x)^n$ nos casos:

a) $m < k$ b) $m \geq k$

161 Determine o coeficiente do termo em x^4 do desenvolvimento de $(1 + x)^2 + (1 + x)^3 + (1 + x)^4 + ... + (1 + x)^{20}$.

162 (IQUFRJ - 60) Determine o coeficiente de x^{28} no desenvolvimento de

$$\frac{\left(x^4 + 3x^2 - 4\right)^{50}\left(x+2\right)^{20}}{\left(x^2 + 4\right)^{50}\left(x^2 - 1\right)^{45}}$$

163 (ITA) Considere o binômio $\left(\frac{1}{x} + ax^2\right)^{36}$. Esse binômio possui certo termo T independente de x. Se elevarmos ax^2 a uma certa potência α, o termo independente de x do novo binômio será o quinto termo. Determine T e α.

164 Calcular o coeficiente do termo em x^6 do desenvolvimento de $(x^3 - x^2 + x) \cdot (x^2 - 1)^{10}$.

165 Determine o termo em x^8 do desenvolvimento de $(x^2 + 1)^{10} \cdot (2x + 1)^8$.

166 Determine o coeficiente do termo em x^2 do desenvolvimento de $(1-2x)^{10} \cdot (3x-1)^{20}$

167 Prove as identidades

a) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$

b) $1 + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n} = 2^{n-1}(n+2)$

c) $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} - 4\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n (n+1)\binom{n}{n} = 0$

d) $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} n\binom{n}{n} = 0$

e) $\binom{n}{p} + \binom{n-1}{p-1}\binom{n}{1} + \binom{n-2}{p-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{n-p+1}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = 2^p \binom{n}{p}$

168 Prove as identidades

a) $1 + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 8\binom{n}{3} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$

b) $1 - 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - 27\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n 3^n \binom{n}{n} = (-1)^n 2^n$

c) $1 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \binom{2n}{3}^2 + \ldots + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$

169 Demonstrar que

$$\binom{n}{1}x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2} + \ldots + k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \ldots + n\binom{n}{n}x^n = nx$$

170 Demonstrar a fórmula ($p < a, p < b$)

$$\binom{a+b}{p} = \binom{a}{p} + \binom{a}{p-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{p-2}\binom{b}{2} + \ldots + \binom{b}{p}$$

utilizando a identidade $(x + 1)^{a+b} = (x + 1)^a \cdot (x + 1)^b$

171 Demonstrar que para $p < n$ a soma

$$\binom{n}{p} - \binom{n}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{p-2} - \ldots + (-1)^p \binom{n}{p}$$ é nula se p é impar e é

igual a $(-1)^{p'} \binom{n}{p'}$ se p é par igual a 2p'

172 Demonstre que para

a) n par temos: $n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + .. + 2^2 = \frac{1}{2}\,[(n + 1) \cdot n + n \cdot (n - 1) + .. + 2 \cdot 1]$

b) n impar temos: $n^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 = \frac{1}{2}\,[(n + 1) \cdot n + n \cdot (n - 1) + \ldots + 2 \cdot 1]$

173 Estabelecer a expressão que dê a soma S(n) dos n primeiros termos das seguintes somas:

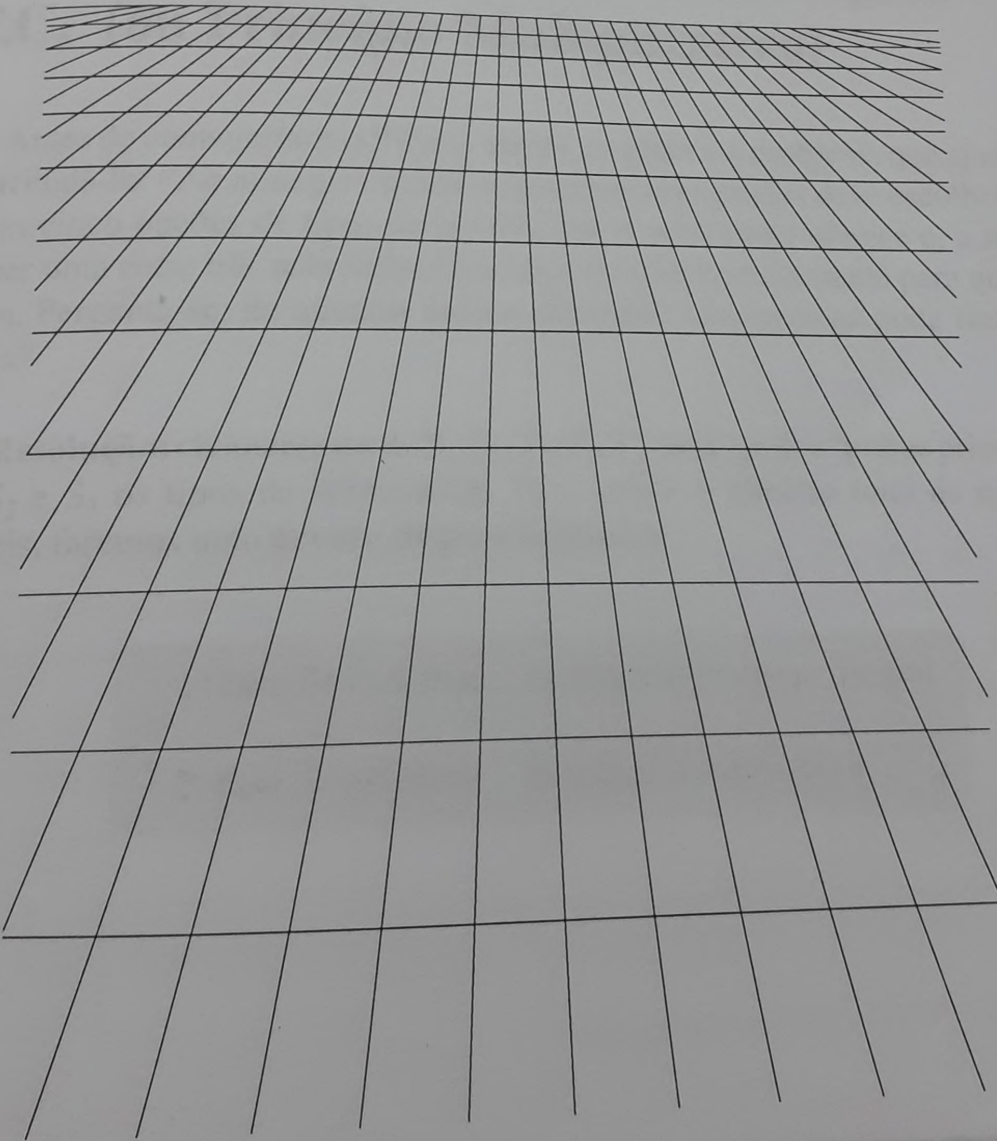
a) $S(n) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots$
b) $S(n) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots$
c) $S(n) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots$
d) $S(n) = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots$
e) $S(n) = 1 + 3x + 5x^2 + \ldots$

174 Calcule $\displaystyle\sum_{x=1}^{x=n} \frac{x(x-1)^2}{2}$

175 Calcule a soma S(n) nos casos:

a) $S(n) = -1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (2n)^2$
b) $S(n) = -1^3 + 2^3 - 3^3 + \ldots + (2n)^3$

Capítulo 3

Análise Combinatória

A – Introdução

Análise Combinatória é a parte da Matemática que se dedica à resolução de problemas em que se propõe **formar e contar agrupamentos** com os elementos de um conjunto dado, agrupamentos esses obedecendo às condições especificadas em cada problema.

Quando, num mesmo agrupamento, não for permetido repetir elementos (elementos distintos dois a dois), chamaremos de Análise Combinatória Simples ou Sem Repetição.

Caso contrário, sendo permitido repetir elementos num mesmo agrupamento, chamaremos de Análise Combinatória Completa ou Com Repetição. Neste capítulo estudaremos os dois casos e, depois que apresentarmos cada um dos principais tipos de problemas de contagem, nos Exercícios Suplementares estaremos propondo uma série de problemas "misturados" para que o aluno se acostume a identificar o método mais apropriado para resolver cada um deles.

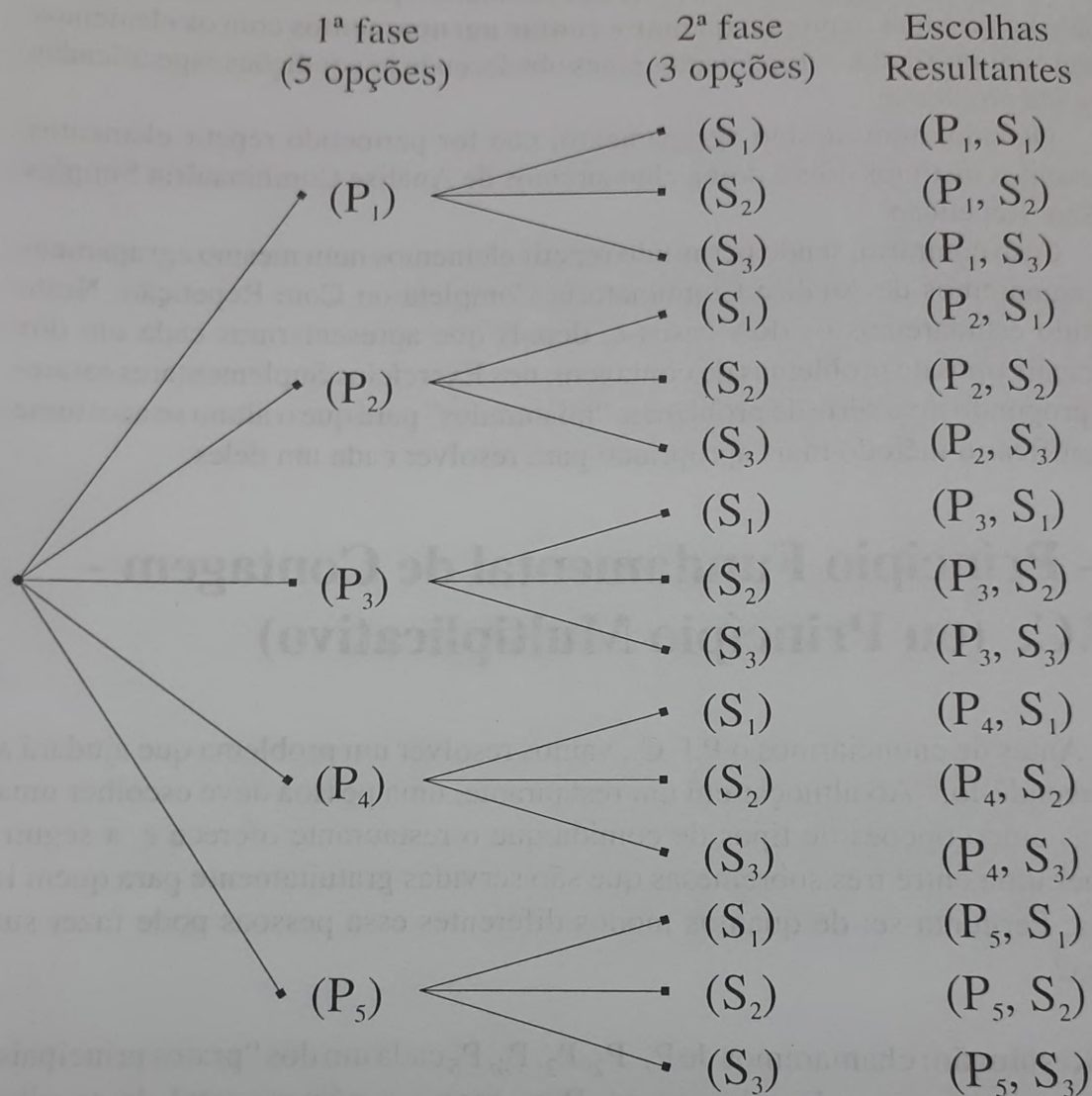
B – Príncipio Fundamental de Contagem - P.F.C. (ou Princípio Multiplicativo)

Antes de enunciarmos o P.F.C., vamos resolver um problema que ajudará a compreendê-lo: "Ao almoçar em um restaurante, uma pessoa deve escolher uma entre as cinco opções de tipos de comida que o restaurante oferece e, a seguir, escolher uma entre três sobremesas que são servidas gratuitamente para quem lá almoça. Pergunta-se: de quantos modos diferentes essa pessoas pode fazer sua escolha?

Resolução: chamaremos de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 cada um dos "pratos principais" e S_1, S_2 e S_3 os tipos de sobremesas. Para contar o número total de escolhas possíveis, faremos uma **árvore de possibilidades**:

1ª fase de escolha: escolher o prato principal.

2ª fase de escolha: escolher a sobremesa.

Árvore de Possibilidades

Com essa "árvore" foi possível determinar quais são todas as escolhas possíveis; mas como o problema pergunta quantas são essas escolhas, fica fácil perceber que o número total de possibilidades de escolha (chamaremos de α) pode ser calculado assim:

$\alpha = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$ tipos diferentes de refeições.

Ou seja:

$$\alpha = (\text{n}^\text{o} \text{ de opções da } 1^\text{a} \text{ fase}) \cdot (\text{n}^\text{o} \text{ de opções da } 2^\text{a} \text{ fase})$$

daí o nome: "Princípio multiplicativo".

Vamos, agora, acrescentar mais uma **fase de escolha** ao problema anterior. Por exemplo: após a refeição, cada cliente deve escolher um entre dois caixas para pagar: um só recebe tickets e o outro, em cheque ou dinheiro.

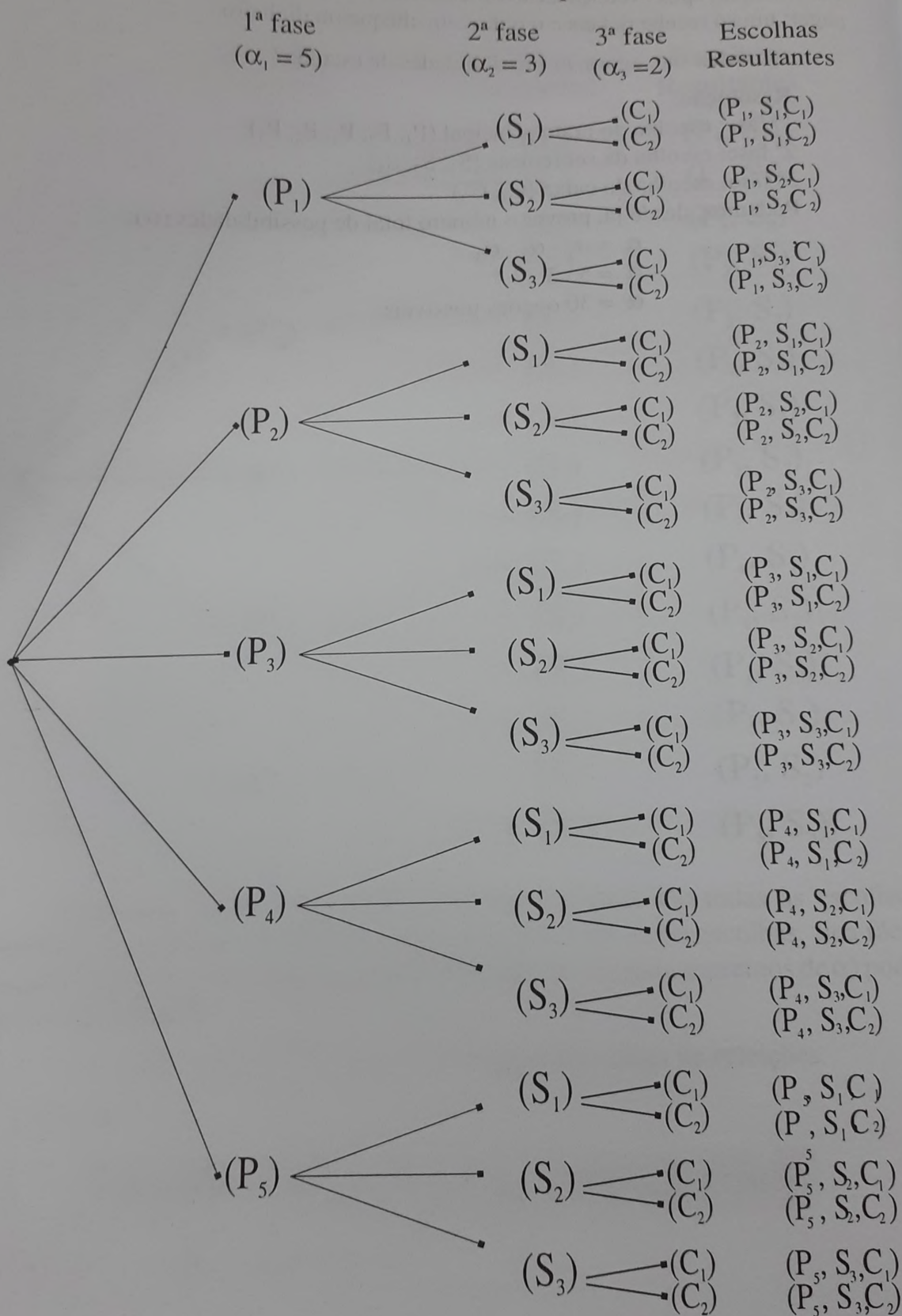
Quantas são, agora, as possibilidades de escolha?

Resolução:

1ª fase: escolha do prato principal (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)
2ª fase: escolha da sobremesa (S_1, S_2, S_3)
3ª fase: escolha do caixa (C_1, C_2)

Podemos, desde já, prever o número total de possibilidades (α):

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$$
$$\alpha = 5 \cdot 3 \cdot 2$$
$$\alpha = 30 \text{ opções possíveis}$$

Confirmemos isto através da "**árvore de possibilidades**":

Observando essa "árvore", verificamos que até a 2ª fase de escolha havia 15 possibilidades e que, de cada um desses resultados, estão saindo duas novas opções.

Assim sendo, o número total de opções passa a ser:

$\alpha = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2$, ou seja,

$\alpha = 15 \cdot 2 = 30$, ou seja,

$\alpha = 5 \cdot 3 \cdot 2$ e, portanto,

$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$, onde

$\alpha_1 =$ nº de opções da 1ª fase de escolha.

$\alpha_2 =$ nº de opções da 2ª fase.

$\alpha_3 =$ nº de opções da 3ª fase.

B.1 – Enunciado do Princípio Fundamental de Contagem (P.F.C.)

Consideremos um problema em que há **i** fases de escolha ($F_1, F_2, F_3, ..., F_i$) e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_i$, respectivamente, os nºs de opções de cada uma dessas fases.

Assim, sendo, enunciamos:

"O número total (α) de escolhas diferentes que se pode fazer é

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_i$$

B.1) Exemplos resolvidos

1º Exemplo:

Dispondo dos algarismos 1, 2, 4, e 7, quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição (sem repetir algarismos num mesmo número), podemos formar?

Resolução: número $\rightarrow \frac{\text{u. m.}}{F_1} \; \frac{\text{c.}}{F_2} \; \frac{\text{d.}}{F_3} \; \frac{\text{u.}}{F_4}$

fase F_1 escolher um algarismo para ocupar a posição das unidades de milhar: $\alpha_1 = 4$

fase F_2 escolher o algarismo para as centenas: $\alpha_2 = 3$ pois um já foi escolhido na fase anterior.

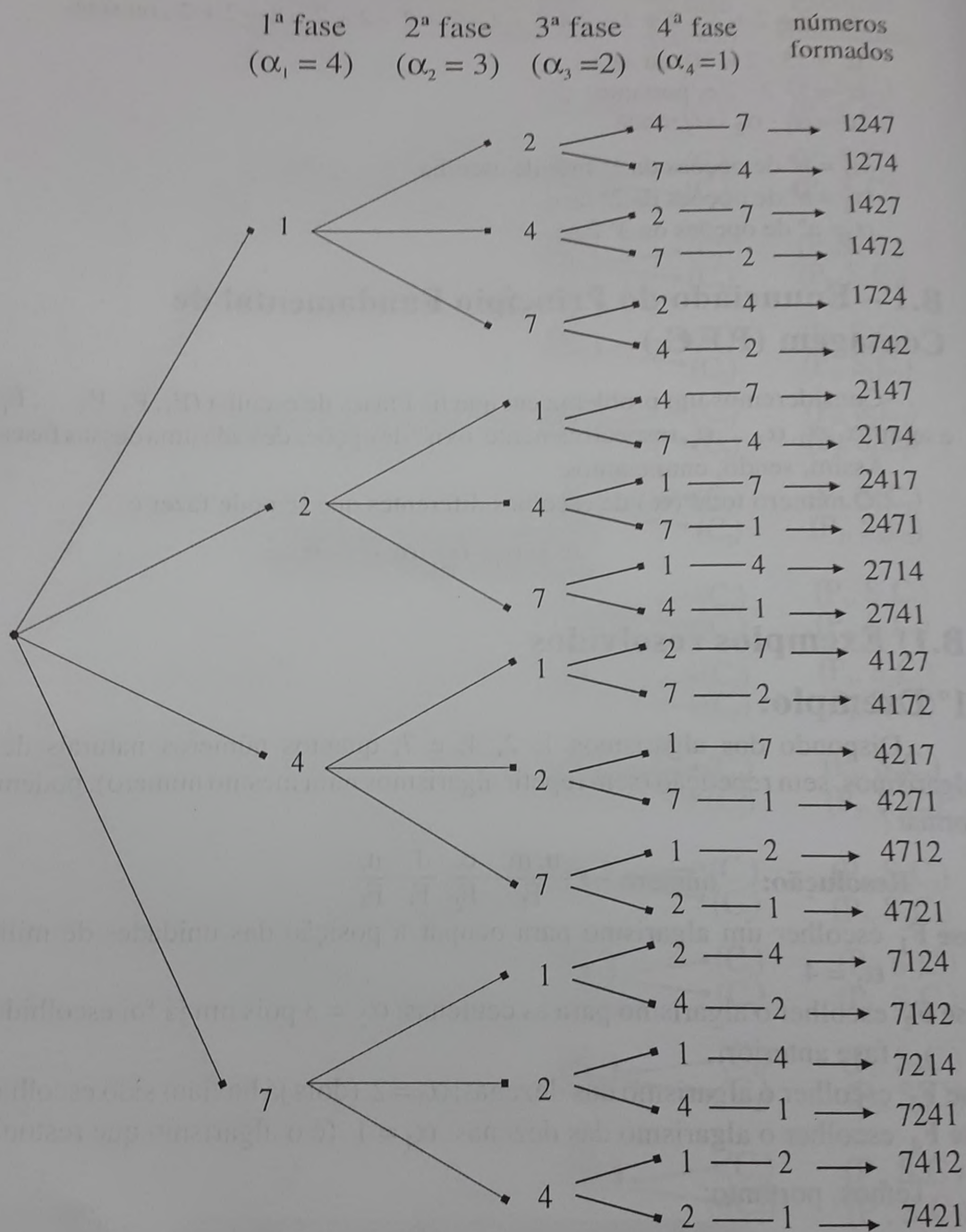
fase F_3 escolher o algarismo das dezenas: $\alpha_3 = 2$ (dois já haviam sido escolhidos)

fase F_4 escolher o algarismo das dezenas: $\alpha_4 = 1$ (é o algarismo que restou).

Temos, portanto:

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Resposta: podemos formar 24 números nas condições especificadas pelo problema.

Observe a “**árvore**” correspondente:

2º Exemplo

Dispondo dos algarismos 1, 2, 4 e 7, quantos números naturais de 4 algarismos podemos formar?

Resolução: note que, neste problema, é permitido repetir algarismos num mesmo número. Portanto, temos:

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4$$
$$\alpha = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$$

Resposta: podemos formar 256 números.

3º Exemplo

Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podemos formar?

Resolução: Número $\overline{F_1}\ \overline{F_2}\ \overline{F_3}\ \overline{F_4}$

O algarismo 0 (zero) não pode ocupar a 1ª posição (unidades de milhar) pois nesse caso o número formado não seria de 4 algarismos.

Assim sendo, $\alpha_1 = 6 - 1 = 5$. (Note que é importante começar a resolução pelas fases que apresentam restrições: neste caso o zero que não pode ocupar a 1ª posição)

Na fase seguinte (F_2), podemos escolher qualquer algarismo (inclusive zero) exceto aquele que foi escolhido na fase anterior e, portanto, $\alpha_2 = 6 - 1 = 5$.

Na seqüência, temos:

$$\alpha_3 = 6 - 2 = 4$$
$$\alpha_4 = 6 - 3 = 3$$
$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4$$
$$\alpha = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$$

Resposta: é possível formar 300 números nessas condições.

4º Exemplo:

Quantos números naturais pares de quatro algarismos, sem repetição, podemos formar com todos os algarimos do sistema decimal (0, 1, 2, ..., 9)?

Resolução:

1º tipo de número par: terminando em zero.

$$\overline{F_1}\ \overline{F_2}\ \overline{F_3}\ \underline{0}$$

$$\begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{matrix}$$
$$\beta 1 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \quad \begin{cases} F_1\text{: todos, menos zero} \\ F_2\text{: todos, menos zero e } F_1 \\ F_3\text{: todos, menos zero, } F_1 \text{ e } F_2 \end{cases}$$

2º tipo de número par: terminando em 2, 4, 6 ou 8

$$\overline{F_2}\ \overline{F_3}\ \overline{F_4}\ \overline{F_1}$$

$$\begin{matrix} & F_1 & & F_2 & & F_3 & & F_4 & \\ \beta 2 = & 4 & \cdot & 8 & \cdot & 8 & \cdot & 7 & = 1792 \end{matrix} \begin{cases} F_1 : 2, 4, 6 \text{ ou } 8 \\ F_2 : \text{todos, menos zero e } F_1 \\ F_3 : \text{todos, menos } F_1 \text{ e } F_2 \\ F_4 : \text{todos, menos } F_1, F_2 \text{ e } F_3 \end{cases}$$

Resposta: O total de números pares que podem ser formados é:

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2 = 504 + 1792$$

$$\alpha = 2296$$

Exercícios

176 Dispondo das letras A, B e C e dos algarismos 1, 2, 3 e 5, quantas placas de automóveis formados por 3 letras seguidas de 4 algarismos podemos formar?

177 No problema anterior, quantas são as placas de automóveis que podem ser formadas sem repetir letras nem algarismos numa mesma placa?

178 Em um teste da loteria esportiva, **uma aposta simples** significa escolher um único resultado para cada jogo: coluna um, coluna do meio ou coluna dois. Sendo assim, quantas apostas simples diferentes podemos fazer num teste de loteria esportiva com 13 jogos?

179 No exercício anterior, se fossem só dois jogos, **quantas** e **quais** seriam as apostas simples possíveis?

180 Chamamos de **anagrama** a qualquer formação com um conjunto de letras, tendo sentido ou não. Nessas condições, perguntamos:

a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FUVEST?
b) Desses anagramas formados, quantos começam pela letra V?
c) Quantos começam pela letra T e terminam em S?
d) Quantos começam por vogal?
e) Quantos terminam em consoante?
f) Quantos começam por vogal e terminam em consoante?
g) Quantos começam e terminam com consoantes?

181 a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra UNICAMP?
b) Em quantos desses anagramas aparecem juntas as letras AMP?
c) Quantos têm as letras AMP juntas e nessa ordem?

182 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, perguntamos:

a) Quantos números naturais de 3 algarismos podemos formar?
b) Desses, quantos são ímpares?

183 Com os mesmos algarismos do exercício anterior, perguntamos:

a) Quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podemos formar?
b) Quantos desses números são pares?

184 Com os algarismos 0, 1, 2, ... , 8:

a) Quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podemos formar?
b) Quantos desses são pares?
c) Quantos são ímpares?

185 a) Quantos números naturais de 4 algarismos podemos formar usando os algarimos 0, 1, 2, ... , 8?
b) Desses, quantos são ímpares?

186 Numa perua usada para transporte, os passageiros podem escolher um, dentre os sete assentos numerados de 1 a 7.
Assim sendo, de quantos modos diferentes podemos acomodar 3 pessoas nesse veículo?

187 De quantos modos podemos dispor 7 pessoas acomodadas na mesma perua do exercício anterior?

188 São dados os conjuntos
$A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Quantas **funções injetoras** de A em B distintas podemos formar?

189 Um grupo de seis pessoas, entre as quais estão Américo e Lays, deve formar uma fila para que sejam atendidos num consultório médico.
a) Em quantas ordens diferentes pode ser formada essa fila?
b) Em quantas dessas filas, Américo e Lays aparecem juntos?
c) Em quantas eles aprecem separados?

190 Num triângulo ABC, tomemos 3 pontos sobre o lado AB, 4 sobre BC e 5 sobre CA, todos esses pontos distintos dois a dois e não coincidentes com os vértices do triângulo. Quantos triângulos distintos podemos formar com esses 12 pontos de modo que tenham um único vértice em cada lado do triângulo ABC?

191 Considerendo os mesmos 12 pontos do exercício anterior, quantas retas distintas ficam determinadas por esses pontos? (Lembre-se: (P,Q) e (Q, P) determinam uma mesma reta)

192 Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números naturais, sem repetição de algarismos, podemos formar de modo que sejam maiores que 200.000?

193 É possível formar 120 números naturais de 5 algarismos, sem repetição, com os algarismos 2, 3, 5, 7 e 9. Colocando-os em ordem crescente, que posição ocupa o número 35792?

194 Determine o número de divisores positivos de cada um dos seguintes números, dados através de suas decomposições em fatores primos:

a) $5^2 \cdot 7$
b) $2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$
c) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11$
d) $x^a \cdot y^b \cdot z^c$

195 Uma bandeira é formada de sete listras que devem ser pintadas de três cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor? (Instituto de Matemática e Estatística da USP - 1969)

196 Uma bandeira é formada de sete listras que **podem** ser pintadas com as cores preto, branco ou vermelho. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la, de modo que duas listas adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

197 Cada linha telefônica é formada por sete algarismos divididos em dois grupos: um, formado pelos primeiros três algarismos, que distingue os centros telefônicos, e o outro, com quatro algarismos, que distingue as linhas de um mesmo centro. Suponha que só os algarismos de cada grupos são todos distintos. Quantas linhas telefônicas, começando com o algarismo 2, poderiam ser lançadas? (FAU da USP - 1969).

C – Permutação Simples

C.1 – Definição

Dado o conjunto $A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \}$, chama-se **permutação simples** dos **n** elementos de A ($n \in N$), a qualquer conjunto ordenado com esses **n** elementos. Indica-se **Pn**, o número de permutações com **n** elementos.

Exemplos:

1º) Quantas e quais são as permutações de 3 elementos que podemos fazer com os elementos do conjunto $A = \{a, b, c\}$?

Resolução: calculemos, primeiro, quantas são.

$$\text{trio ordenado} \rightarrow \left(\overline{}_{F_1}\ \overline{}_{F_2}\ \overline{}_{F_3}\right)$$

$F_1 \rightarrow$ a, b, ou c ($\alpha 1 = 3$)
$F_2 \rightarrow \alpha_2 = 2$ (excluindo F_1)
$F_3 \rightarrow \alpha_3 = 1$ (excluindo F_1 e F_2)
Portanto $P_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$
As permutações simples com esses 3 elementos são:

(a, b, c)
(a, c, b)
(b, a, c)
(b, c, a)
(c, a, b)
(c, b, a)

2º) Em quantas ordens podemos colocar 5 pessoas que vão formar uma fila?

Resolução: resolver este problema significa obter o número total de conjuntos ordenados de 5 elementos que podemos formar com os elementos do conjunto.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$\text{quinteto ordenado} \rightarrow \left(\overline{}_{F_1}, \overline{}_{F_2}, \overline{}_{F_3}, \overline{}_{F_4}, \overline{}_{F_5}\right)$$

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ filas diferentes.

C. 2 – Cálculo do número de permutações simples (Pn)

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$\text{ênuplas ordenadas} \rightarrow \left(\overline{}_{F_1}, \overline{}_{F_2}, \overline{}_{F_3}, \ldots, \overline{}_{F_n}\right)$$

$Pn = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ e; portanto,

$$\boxed{Pn = n!\ (n \in N)}$$

que é a fórmula para se calcular o número de permutações simples (sem repetição) com n elementos.

Observação:

Note que, em particular, definimos: $P_1 = 1! = 1$ *e* $P_0 = 0! = 1$

D – Arranjos Simples

D.1) **Definição**: São dados o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ de n elementos ($n \in N$) e o número natural $p \in N / p \leq n$. Chama-se **arranjo simples** desses **n** elementos tomados **p** a **p**, a qualquer conjunto ordenado com **p** elementos (sem repetição) escolhidos entre os **n** elementos de A. Indica-se $A_{n,p}$, o número de arranjos simples de **n** elementos **p** a **p**.

Exemplos:

1º) Quantos e quais são so arranjos simples de 4 elementos, 2a2, que podem ser formados com os elementos de A = {a, b, c, d} ?

Resolução: Calculemos, primeiro, quantos são os arranjos ($A_{4,2}$).

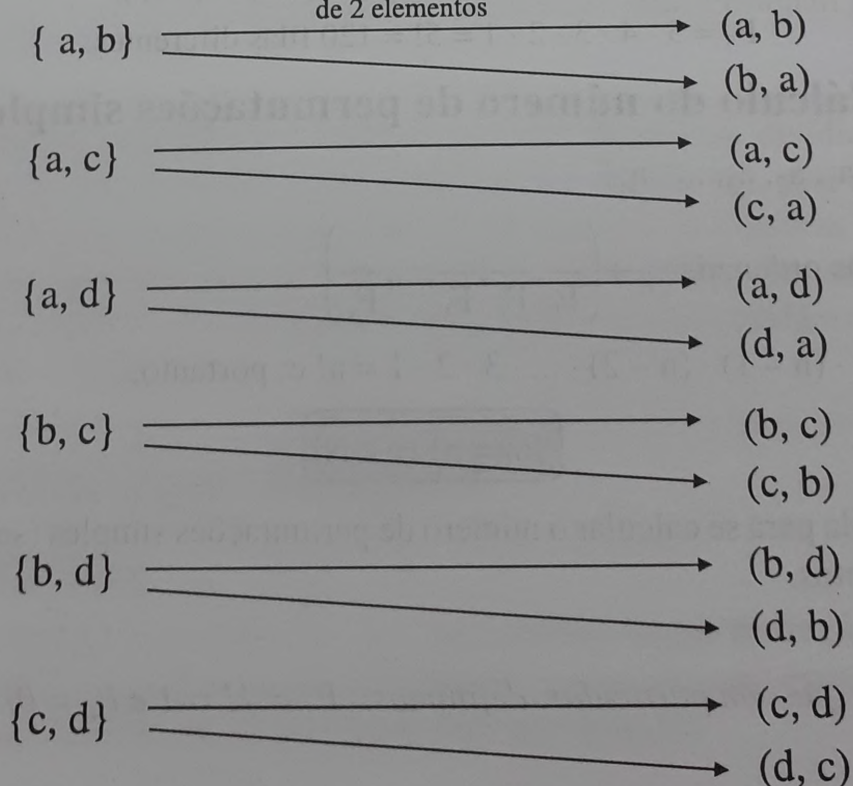
Vamos formar pares ordenados $\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}\right)$

$$A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \ (n = 4 \text{ e } p = 2)$$

Note que esse cálculo pode ser indicado na forma de fatoriais:

$$A_{4,2} = 4 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{4!}{2!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Esses 12 arranjos simples de 4 elementos, 2a2, formados com os elementos de A, podem ser obtidos como se segue: A = {a, b, c, d}

Subconjuntos de a com dois elementos	permutações simples de 2 elementos	Arranjos simples de 4, 2 a 2 (pares ordenados)
{a, b}	→	(a, b)
	→	(b, a)
{a, c}	→	(a, c)
	→	(c, a)
{a, d}	→	(a, d)
	→	(d, a)
{b, c}	→	(b, c)
	→	(c, b)
{b, d}	→	(b, d)
	→	(d, b)
{c, d}	→	(c, d)
	→	(d, c)

2º) Quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podemos formar com os elementos de $A = \{1, 2, \dots, 7\}$?

Resolução: Cada número formado é um conjunto ordenado de 4 elementos. Observe:

$$(2, 1, 4, 6) \rightarrow 2.146$$

Temos, então, $n = 7$ e $p = 4$:

$$\text{quarteto ordenado} \rightarrow \left(\overline{F_1}\ \overline{F_2}\ \overline{F_3}\ \overline{F_4}\right)$$

$A_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 42 \cdot 20 = 840$ números ou, indicando com fatoriais,

$$A_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{3!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

D.2 - Cálculo do número de arranjos simples de n elementos, p a p ($A_{n,p}$)

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$$\text{conjuntos ordenados com p elementos} \rightarrow \left(\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_p}\right)$$

$$A_{n,p} = \overset{F_1}{n} \cdot \overset{F_2}{(n-1)} \cdot \overset{F_3}{(n-2)} \cdot \dots \cdot \overset{F_p}{[n-(p-1)]}$$

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$$

$$A_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\dots\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

e, portanto,

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$(n, p \in \mathbb{N} \text{ e } p \leq n)$$

que é a fórmula para se calcular o número de arranjos simples (sem repetição) de **n** elementos **p** a **p**.

** Observações:*

1ª) É importante notar que, quando $p = n$, temos:

$A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n! = P_n$, *ou seja, as permutações simples com **n** elementos são um caso particular dos arranjos simples quando $p = n$.*

2ª) Note que, em particular definimos

$$A_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \text{ também}$$

$$A_{0,0} = \frac{0!}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

3ª) Para resolver problemas de permutações ou arranjos, o aluno pode, de acordo com a conveniência, escolher entre aplicar as fórmulas vistas (P_n e $A_{n,\,p}$) ou aplicar o princípio fundamental de contagem.

198 De quantas maneiras podemos distribuir as onze camisas de um time de futebol, numeradas de um a onze, entre onze jogadores?

199 Supondo que "escalar um time de futebol" seja distribuir as onze camisas entre os jogadores, determine quantos times é possível escalar, dispondo de 20 jogadores?

200 a) Quantos números naturais de 5 algarismos, sem repetição, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, ... , 9?

b) Quantos desses são pares?

c) Quantos são ímpares?

201 Dispondo dos algarismos do sistema de base 10 (0, 1, 2, ... , 9), pergunta-se:

a) Quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados?

b) Desses, quantos são ímpares?

c) Quantos são pares?

202 Quantos números naturais, sem repetição, menores que 800, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, ... , 9?

203 Quantos números naturais de 6 algarismos, sem repetição, podemos formar de modo que comecem por 7 e tenham dezena 48, dispondo dos elementos do conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$?

204 Com os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, pergunta-se:

a) Quantas **funções injetoras** de A em B, é possível formar?

b) Quantas **funções** de A em B, é possível formar?

205 a) Quantas funções de $A = \{1,2,3,\ldots,12\}$ em $B = \{0, \pi, \sqrt{2}\}$ podemos formar?

b) Quantas dessas funções são injetoras ?

206 Sendo dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, pergunta-se:

a) Quantas funções de A em B é possível determinar ?

b) Quantas dessas não são injetoras?

207 Na sala de espera de um escritório de advocacia há 8 cadeiras numeradas de 1 até 8. De quantas formas podemos acomodar 3 pessoas sentadas nessas cadeiras?

208 a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FUTEBOL?
b) Desses, quantos terminam em F?
c) Quantos terminam em BOL?
d) Quantos começam por vogal?
e) Quantos começam e terminam por consoantes?
f) Quantos apresentam as letras BOTE juntas e nesta ordem?
g) Quantos apresentam as letras FUL juntas?

209 De quantas maneiras podemos colocar 10 pessoas ($P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{10}$) em fila de modo que :
a) P_1 e P_2 fiquem sempre juntas ?
b) P_8, P_9 e P_{10} fiquem sempre juntas?
c) P_5 fique numa das extremidades?
d) P_2 e P_9 fiquem nas extremidades da fila?
e) As extremidades estejam ocupadas por P_4 ou P_5 ou P_6 ou P_7 ?

210 Colocando-se em **ordem decrescente** todos os números obtidos a partir de 701583, permutando-se os seus algarismos, que posição ocupa o número 357.018?

211 Considerando o enunciado do exercício anterior, se os números fossem colocados em **ordem crescente**, que posição ocuparia 357.018?

212 Permutando-se os algarismos do número 124 e somando-se todos os números assim obtidos, qual será o valor desta soma?

213 Permutando-se os algarismos do número 52.187 e somando-se todos os 120 números assim obtidos, qual será o valor desta soma?

214 Numa urna há 12 bolas numeradas de 1 a 12 e dela são retiradas quatro bolas sucessivamente. De quantos modos podemos, então, obter uma permutação qualquer de 4 números consecutivos?

215 a) De quantos modos podemos retirar três etiquetas de uma urna contendo **n** etiquetas numeradas de 1 até n , obtendo uma permutação qualquer de três números consecutivos?
b) Sabendo que essas 3 etiquetas são retiradas sucessivamente e sem reposição, quantos são todos os resultados possíveis para esse sorteio ? (Note que $(1, 2, 3,) \neq (2, 1, 3)$).

216 Com os algarismos 0, 1, 2, ... , 9, quantos números naturais, sem repetição, maiores de 300 e menores que 2000 podemos formar?

217 Com os algarismos 1, 2, ... , 8, quantos números naturais de 8 algarismos, sem repetição, podemos formar, de modo que os algarismos ímpares ocupem sempre as "posições ímpares"(unidades, centenas, etc.)?

218 Considerando os números inteiros entre 2000 e 5000, inclusive os extremos, pergunta-se:

a) Quantos são esses números?
b) Quantos desses não apresentam algarismos repetidos?
c) Quantos desses apresentam pelo menos um algarismo repetido?

219 Pretende-se formar duas filas paralelas de 6 alunos, com 6 rapazes e 6 moças. Nessas condições, pergunta-se:

a) De quantas formas poderemos dispô-los de modo que as filas sejam determinadas por sexo?
b) E se não houvesse essa discriminação?
c) Em quantos pares de filas diferenciadas por sexo, as pessoas do casal F_1, M_1 se manterão lado a lado?

220 De quantos modos poderemos acomodar 8 pessoas (3 homens e 5 mulheres) num banco numerado com 8 lugares de modo que dois determinados casais não se separem, isto é, H_1 não se separa de M_1 e H_2 não se separa de M_2 ?

221 De quantos modos diferentes podemos vestir 3 meninos, cada um com uma calça, uma camisa e um paletó, dispondo-se para isso de 5 calças, 6 camisas e 4 paletós?

222 (IME - USP/73) Considere os algarismos: 1, 2, 3, 4, e 5. Uma das permutações possíveis destes algarismos origina o número 42.351. Determine a soma dos números formados quando os algarismos acima são permutados de todos os modos possíveis.

223 (MAFEI/78) De quantas maneiras pode ser escrito o monômio $x^i .y^j .z^k$, com i, j, e k distintos, se cada expoente pode assumir os valores 1, 2, e 3, levando em conta a ordem dos fatores e dos expoentes?

224 Determine o total de números ímpares de 5 algarismos, sem repetição, que podemos formar com os algarismos de 0 até 9.

225 (CICE/68) Para a seleção brasileira de futebol foram convocados 22 jogadores que jogam em todas as posições, exceto 2 deles que só jogam no gol. De quantos modos se podem selecionar os onze titulares?

226 (FUFRJ/70) De quantos modos, três rapazes e duas moças podem ocupar sete lugares em fila de forma que as moças se sentem juntas uma da outra e os rapazes juntos uns dos outros?

227 (FUVEST/79) Considere os números obtidos a partir de 12.345 efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando-se estes números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?

228 (MACK/79) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6 são formados números de 4 algarismos distintos. Dentre esses, determine quantos são divisíveis por 5.

229 (GV/79) Um show de música será constituído de 3 canções e duas danças. De quantas maneiras distintas pode-se montar o programa, de forma que o show comece com uma canção, termine com uma canção e as duas danças não sejam em seguida?

230 (MED-TAUBATÉ/79) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra VESTIBULAR tais que comecem com a letra V?

E - Combinações simples

E.1- Definição

Sendo dados o conjunto A $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ com **n** elementos $(n \in N)$ e o número natural p $/ p \leq n$, definimos: **combinação simples** desses **n** elementos tomados **p** a **p** é qualquer subconjunto de A com **p** elementos. Indicamos $C_{n,p}$, o número de combinações simples de **n** elementos **p** a **p**.

Exemplos:

1º) **Quantos** e **quais** são os subconjuntos de A = {a, b, c, d} contendo dois elementos?

Resolução: Vamos determinar, primeiro, quais são essas combinações simples (sem repetição) de 4 elementos, 2a2.

Dado A= {a, b, c, d}, os subconjuntos procurados são:

$$\{a, b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$$

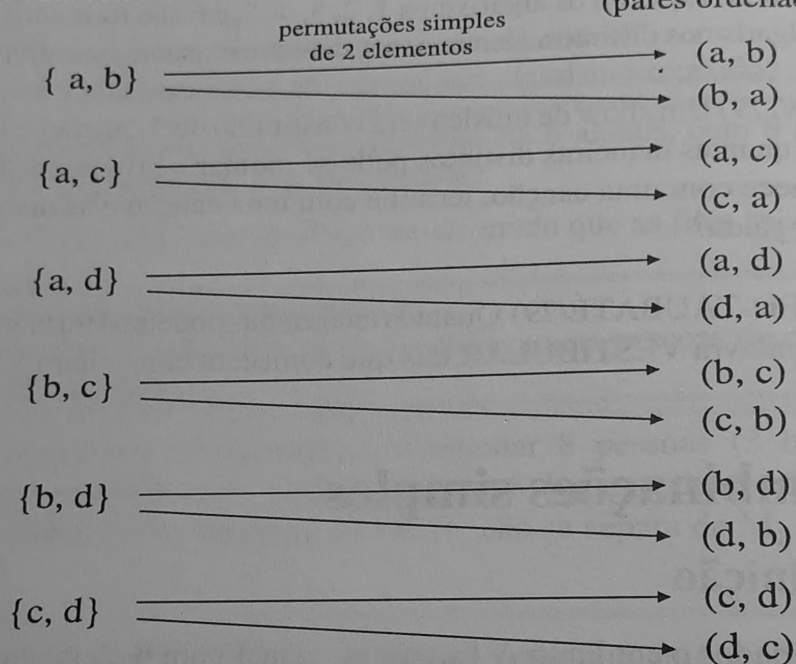
Verificamos, contando caso a caso, que $C_{4,2} = 6$. É muito importante notar que, numa combinação simples, mudando a ordem dos seus elementos, o agrupamento não se altera. Observe:

$$\{a,b\} = \{b,a\}, \{a,c\} = \{c,a\}, \text{etc.}$$

Em seguida, para obter a fórmula para se calcular $C_{n,\,p}$, vamos utilizar as fórmulas de arranjos e permutações simples vistas anteriormente.

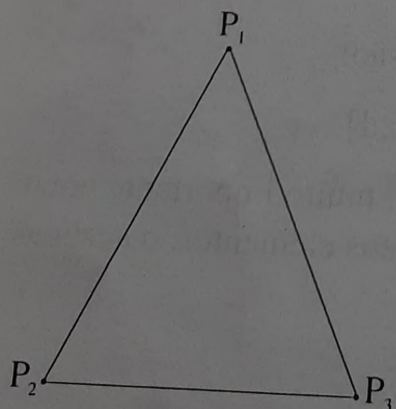
Como já vimos, "arranjar" 4 elementos, 2 a 2, é o mesmo que "combinar" 4 elementos, 2 a 2 e, em seguida, permutar esses 2 elementos "dentro" de cada combinação obtida. Observe:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Subconjuntos de a com dois elementos	permutações simples de 2 elementos	Arranjos simples de 4, 2 a 2 (pares ordenados)
{a, b}	→	(a, b)
	→	(b, a)
{a, c}	→	(a, c)
	→	(c, a)
{a, d}	→	(a, d)
	→	(d, a)
{b, c}	→	(b, c)
	→	(c, b)
{b, d}	→	(b, d)
	→	(d, b)
{c, d}	→	(c, d)
	→	(d, c)

Deste modo, fica fácil perceber que:

$$A_{4,\,2} = C_{4,\,2} \cdot P_2 \Rightarrow C_{4,\,2} = \frac{A_{4,\,2}}{P_2} \Rightarrow C_{4,2} = \frac{\frac{4!}{2!}}{2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$$

Resposta: A tem 6 subconjuntos com 2 elementos.

(2º) São dados 7 pontos de um plano, em posição geral (não há três colineares). Nessas condições, usando a "estratégia" do exercício anterior, calcule **quantos** são os triângulos que podemos desenhar com vértices nesses 7 pontos.

Resolução: $A = \{P_1, P_2, ..., P_7\}$

Obeserve que o triângulo $P_1\,P_2\,P_3$ é o mesmo que $P_2\,P_1\,P_3$ e, portanto, o número de triângulos é igual a $C_{7,\,3}$ (combinações simples de 7 elementos, 3 a 3)

Como vimos no exemplo anterior, "arranjar" é "combinar" e, em seguida, "permutar" o subgrupo:

$$A_{7,3} = C_{7,3} \cdot P_3 \Rightarrow C_{7,3} = \frac{A_{7,3}}{P_3} = \frac{\frac{7!}{(7-3)!}}{3!} \Rightarrow C_{7,3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

Resposta: é possível formar 35 triângulos com vértices nos pontos dados.

E.2- Cálculo do número de combinações simples de n elementos, p a p (Cn,p)

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

Os subconjuntos de A compelementos são as combinações simples de **n** elementos **p** a **p**. Seguindo a mesma estratégia dos exemplos anteriores, temos:

$$A_{n,p} = C_{n,p} \cdot P_p \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$ e, portanto,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad (n,p \text{ e } N \in p \leq n)$$

que é a fórmula para se calcular o número de combinações simples (sem repetição) de **n** elementos **p** a **p**.

Observações:

1º) Em particular, definimos: $C_{n,o} = \frac{n!}{0!(n-p)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

A este resultado podemos associar a seguinte interpretação: quantas subconjuntos de $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ *existem com zero elementos?*
O único subconjunto de A sem elementos é o conjunto vazio, daí concluirmos que $C_{n,0} = 1$.

2º) Note que $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *, isto é, o coeficiente binomial* ***n*** *sobre* ***p*** *é igual ao número de combinações de* ***n*** *elementos* ***p*** *a* ***p***. *Observe:*

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

ou seja

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

que é o resultado do produto (a+b) (a+b) (a+b).
Para formar o monômio $a^2b = a \cdot a \cdot b$, *podemos fazê-lo de 3 modos:*

$$\left.\begin{matrix} a \cdot a \cdot b \\ a \cdot b \cdot a \\ b \cdot a \cdot a \end{matrix}\right\} \; 3 = C_{3,1} = \binom{3}{1}$$

*3º) Como já vimos, arranjos e permutações são **conjuntos ordenados** e, por isso, podemos substituir suas fórmulas pela aplicação do princípio fundamental de contagem. Isso, entretanto, não é possível quando queremos formar combinações simples, quando queremos, por exemplo, achar os subconjuntos de um conjunto A dado.*

E. 3 – Determinação do Tipo de Agrupamento

Seja o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

COMBINAÇÕES SIMPLES: São subconjuntos de A e, portanto, mudando a ordem dos elementos desse agrupamento, o resultado não se altera.

Exemplo: $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$

Problema típico: formar polígonos.

ARRANJOS SIMPLES: são subconjuntos ordenados de A e, portanto, mudando a ordem dos elementos desse agrupamento, o resultado se altera.

Exemplo: $(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3)$

Problema típico: formar números.

PERMUTAÇÕES SIMPLES: São subconjuntos ordenados de A, sem repetição, com todos os elementos do conjunto A, ou seja, uma permutação só difere da outra pela ordem dos seus elementos, não há escolha de quem participa do subconjunto.

Exemplo: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \neq (a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)$

Problemas típicos: formar anagramas ou filas.

RESUMO

- **ARRANJOS**: se escolhe **quem** participa e, em seguida, **em que ordem**.
- **COMBINAÇÕES**: se escolhe apenas **quem** participa do subconjunto.
- **PERMUTAÇÕES**: só se escolhe **em que ordem** vão ficar os elementos.

231 Quantas comissões de 4 pessoas podemos formar, escolhendo-as de um grupo total de 6 pessoas?

232 Considere 5 pontos distintos sobre uma reta **r**. Quantos segmentos de reta é possível determinar com extremidades nesses 5 pontos?

233 São dadas duas retas paralelas **r** e **s**, 5 pontos distintos sobre **r** e 6 pontos distintos sobre **s**. Nessas condições e considerando somente esses 11 pontos, pergunta-se:

a) Quantos segmentos com uma extremidade em **r** e outre em **s** é possível formar?
b) Quantos triângulos com um e somente um vértice em **r** é possível formar?
c) Quantos triângulos com vértices nesses pontos é possível formar?
d) Quantos quadiláteros com vértices nesses pontos é possível formar?

234 De um grupo de 3 engenheiros e 5 administradores queremos escolher comissões de 4 pessoas, sendo 1 engenheiro e 3 administradores. Quantas comissões deste tipo poderemos formar?

235 Num grupo de 10 pessoas, 6 são brasileiros e 4 são de outras nacionalidades. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar de modo que pelo menos 3 pessoas sejam brasileiras?

236 De quantos modos podemos distribuir dez bolas numeradas de 1 a 10 em três gavetas que comportam, respectivamente, 3 bolas, 2 bolas e 5 bolas?

237 Queremos alojar 8 pessoas em duas barracas de camping, respectivamente com capacidade para 5 e 3 pessoas. De quantas formas isto pode ser feito?

238 Queremos colocar 6 etiquetas com a letra A (idênticas entre si) e 4 com a letra B (também indistingüíveis) nas costas de dez pessoas que estão em fila. De quantos modos podemos fazê-lo?

239 De quantos modos distintos podemos colocar as letras A A A A B B B C C em fila?

240 Quantos anagramas distintos podemos formar com as letras da palavra ARARA?

241 Num anagrama com n letras, aparece n_1 vezes a letra A, n_2 vezes a letra B, n_3 vezes a letra C e n_4 vezes a letra D, onde $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. Quantos anagramas diferentes podemos fazer com essas n letras?

242 Num congresso comparecem 15 professores dos quais 4 lecionam MATEMÁTICA. Quantas comissões de 5 membros podemos formar de tal modo que em cada uma compareça pelo menos um professor de MATEMÁTICA.

243 Quantos subconjuntos de 5 cartas contendo exatamente 3 ases podem ser formados com um baralho de 52 cartas?

244 (MAPO/74) Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas, das quais pelo menos 4 bolas sejam pretas?

245 (MACK/70) De quantos modos 8 pessoas podem ocupar duas salas distintas, devendo cada sala conter pelo menos 3 pessoas?

246 Lançando-se uma moeda, 12 vezes, de quantas maneiras podemos obter 7 caras e 5 coroas?

247 Dados 10 pontos num plano dos quais 3 quaisquer nunca estão alinhados, pergunta-se:

a) Quantas retas determinam?
b) Quantos triângulos?
c) Quantos quadriláteros?

248 Dados 12 pontos de um plano tais que 5 estão sobre uma reta **r** e os 7 restantes fora dela, pergunta-se:

a) Qual é o número máximo de retas determinadas por esses 12 pontos?
b) Qual é o número máximo de triângulos determinados?

249 a) Quantas são as diagonais de um polígono convexo de 10 lados (decágono)?

b) Quantas são as diagonais de um polígono convexo de n lados?

250 Determine o número de diagonais (não de faces) do prisma heptagonal.

251 São dados 10 pontos no espaço, dos quais 3 a 3 determinam planos distintos. Pergunta-se:

a) Quantos planos são determinados por estes 10 pontos?
b) Quantas esferas?

252 De quantos modos diferentes podem-se dispor em fila $(p + q)$ pessoas, sendo p homens de alturas todas diferentes e q mulheres também de alturas todas diferentes, de modo que tanto no grupo dos homens como no grupo das mulheres, as pessoas se sucedam em ordem de altura crescente?

253 (POLI/65) De quantas maneiras diferentes podem-se colocar os quatro cavalos de um jogo de xadrez (2 brancos iguais e 2 pretos iguais) no tabuleiro do mesmo jogo? (64 casas).

254 (MAPO/74) A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses – Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podemos formar?

255 (POLI/63) Quantas são as diagonais não de faces, de um prisma cuja base é um polígono convexo de n lados?

256 Determinada organização estabeleceu um sistema de código em que os símbolos são formados por um ou mais pontos, até o máximo de 6 pontos, dispostos de maneira que ocupem os vértices e os pontos médios dos lados maiores de um retângulo. Qual o número total de símbolos obtidos? (Instituto Militar de Engenharia)

257 (ITA) Sobre os lados de um triângulo marcam-se, respectivamente, 3, 4 e 5 pontos distintos não coincidindo com os vértices. Quantos segmentos de reta podemos obter, unindo-se 2 a 2 os centros de todas as circunferências que passam por 3 quaisquer dos pontos marcados?

258 (CESCEA/70) Determine o total de números constituídos de 3 algarismos ímpares e dois pares que podem ser formados com os algarismos de 1 a 9, sem repetição.

259 (MACK/77) Uma equipe brasileira de automobilismo tem 4 pilotos de diferentes nacionalidades, sendo um único brasileiro. Ela dispõe de 4 carros dos quais somente um foi fabricado no Brasil. Sabendo-se que obrigatoriamente ela deve inscrever, em cada corrida, pelo menos um piloto ou um carro brasileiro, determine o número de inscrições possíveis para uma corrida em que participarão 3 carros por equipe.

260 (PUC/78) Numa classe de 40 alunos, 6 são meninas. Determine o número de comissões de 5 alunos, incluindo pelo menos uma menina.

261 Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 4 brancas. De quantos modos distintos se podem retirar da urna, 5 bolas, de modo que pelo menos uma delas seja branca?

262 (FEI/79) a) Quantas permutações simples se formam com as letras da palavra FEIANO?

b) Sendo: $5 \cdot C_n^{n-1} + C_n^{n-3} = A_n^3$, calcular **n**.

263 (PUC/79) Determine o número de maneiras que um professor pode escolher um ou mais estudantes de um grupo de 6 estudantes.

264 Calcule:

a) $A_{6,5} + 2P_3 - C_{5,4}$

b) $4P_3 - 7A_{5,3} - 15C_{7,4}$

c) $\frac{1}{A_{6,2}} + \frac{1}{A_{5,2}}$

d) $\frac{A_{10,7}}{A_{9,7}}$

265 Determine x:

a) $\frac{C_{4x,x-1}}{C_{4x,x+1}} = \frac{2}{15}$

b) $C_{8,x+2} = 2 \cdot C_{8,x+1}$

c) $A_{x,3} : C_{x,4} = A_{4,2}$

d) $C_{x,x-4} = 5 \cdot C_{x,x-2}$

266 Resolver as equações:

a) $\frac{C_{x+1,5}}{C_{x-1,3}} = 21$

b) $C_{10,x+1} = \frac{8}{3} C_{10,x+2}$

c) $A_{x,3} = 24 \cdot C_{x-2,2}$

d) $\frac{1}{C_{4,x}} - \frac{1}{C_{5,x}} = \frac{1}{C_{6,x}}$

e) $\frac{A_{x,7} - A_{x,5}}{A_{x,5}} = 89$

267 Sendo $A_{n,k} = 1680$ e $C_{n,k} = 70$, determine n e k.

268 Resolva o sistema: $\begin{cases} \frac{C_{m+3,p}}{C_{m+5,p}} = \frac{7}{5} \\ m - p = 2 \end{cases}$

269 Calcule $A_{m,3}$ sabendo-se que $C_{m,3} = 84$.

270 Calcule x e y sabendo-se que: $\frac{C_{x+1,y+1}}{5} = \frac{C_{x+1,y}}{5} = \frac{C_{x+1,y-1}}{3}$

Exercícios Suplementares

271 Cinco estradas ligam a cidade **A** à cidade **B**. Três estradas ligam a cidade **B** à cidade **C**. De quantas maneiras podemos ir de **A** à **C**, passando por **B**?

272 Duas Sociedades Esportivas, com 100 esgrimistas cada, devem escolher um espadachim de cada uma delas para participar de uma competição. De quantos modos pode ser feita a seleção?

273 Temos cinco tipos de envelopes sem selos e quatro tipos de selos de um mesmo valor. De quantas maneiras podemos escolher um envelope com selo para enviar uma carta?

274 De quantos modos podemos escolher uma vogal e uma consoante da palavra "cantor"?

275 De quantos modos podemos escolher uma vogal e uma consoante da palavra "treino"?

276 Lança-se um dado com seis faces e roda-se um pião com oito faces. De quantas maneiras eles podem combinar-se ao parar ?

277 Há cinco caminhos até o cume de uma montanha. De quantas maneiras pode-se subir e descer da montanha? E subir e descer por caminhos diferentes?

278 Em uma granja há 20 ovelhas e 24 porcos. De quantos modos pode-se escolher uma ovelha e um porco? Depois de feita esta escolha, de quantas maneiras pode-se fazer nova seleção?

279 De quantas maneiras podem ser indicadas uma casa branca e uma preta em um tabuleiro de xadrez? E indicar duas casas independentes das cores?

280 De quantas maneiras podem ser escolhidas, em um tabuleiro de xadrez, uma casa branca e uma preta que não estejam numa mesma horizontal nem numa mesma vertical?

281 Dadas 12 palavras do gênero masculino, 9 do feminino e 10 do comum de dois, escolher uma de cada gênero. De quantos modos pode ser efetuada esta escolha?

282 Temos 6 pares de luvas com medidas distintas. De quantos modos podemos escolher uma luva da mão direita e outra da esquerda e que sejam de tamanhos diferentes ?

283 Dentre 3 exemplares de um texto de álgebra, 7 de um texto de geometria e 7 de um texto de trigonometria deve-se escolher um exemplar de cada texto. Quantos modos existem para efetuar a escolha?

284 Há um cesto com 12 maçãs e 10 laranjas. João pega uma maçã e uma laranja, em seguida Maria escolhe uma maçã e uma laranja. Em que caso ela terá maior liberdade de escolha: quando João pega uma maçã ou uma laranja?

285 Três peões têm 6 faces, 8 faces e 10 faces. De quantas maneiras eles podem cair? E se pelo menos dois peões cairem sobre as faces com o número 1?

286 De quantos modos podemos escolher de um baralho, com 52 cartas, uma carta de cada naipe? E com a condição de não haver entre as escolhidas nenhum par (dois reis, dois dez, etc)?

287 De quantos modos podemos escolher de um baralho, com 52 cartas, uma carta de cada naipe, sendo que os naipes vermelhos e os naipes pretos formem pares (nove de espadas com nove de paus, valete de ouros com valete de copas, etc.)?

288 De quantos modos podemos dividir ao meio um baralho de 36 cartas (A, 2, ..., 9) de modo que cada metade tenha dois ases?

289 Cinco moças e três rapazes jogam bola. De quantas maneiras podem ser formadas 2 equipes de 4 pessoas cada, se em cada uma deve haver ao menos um rapaz?

290 De quantas maneiras 6 cartas podem ser entregues por 3 carteiros, sendo que cada carta pode ser levada por qualquer um deles?

291 Uma pessoa tem 7 livros de matemática e outra tem 9 de física. De quantos modos podem ser trocados um livro de uma pessoa por um livro da outra?

292 Em uma reunião devem discursar 5 pessoas : A, B, C, D e E. De quantas maneiras podem ser distribuidas na lista de oradores, sendo que B não deve discursar antes de A? E se a condição for de que A deva falar imediatamente antes de B?

293 Achar o número de permutação com **n** elementos, sabendo-se que dois elementos a e b não devem ser vizinhos.

294 De um baralho com 52 cartas são retiradas 10.

a) Em quantos casos haverá pelo menos um ás entre as cartas retiradas?
b) Em quantas haverá somente um ás?
c) Em quantos haverá não menos que dois ases?
d) Em quantos, exatamente 2 ases?

295 Em uma estação ferroviária há **m** semáforos. Quantos sinais diferentes são possíveis se cada um deles tem 3 estágios: vermelho, amarelo e verde?

296 Num estado não há dois habitantes com os mesmos dentes. Qual pode ser a população máxima nessa cidade? (Sendo 32 o maior número de dentes).

297 Num vagão de passageiros de um trem há 2 bancos opostos com 5 lugares cada. De 10 passageiros, quatro desejam se sentar de frente para a locomotiva, três de costas para ela e os três restantes são indiferentes à posição. De quantas maneiras os passageiros podem se instalar?

298 Num sindicato são escolhidas 9 pessoas. Dentre elas há que se eleger o presidente, o vice-presidente, o secretário e o tesoureiro. De quantos modos isto pode ser feito?

299 Dentre os integrantes de uma conferência, em que tomam parte 52 pessoas, deve-se escolher uma delegação formada por 5 pessoas. De quantas formas a escolha pode ser feita?

300 A mãe tem 2 maçãs e 3 peras. A cada dia, durante cinco dias seguidos, dá ao filho uma fruta. De quantas maneiras isto pode ser feito?

301 Uma mãe tem 2 maçãs, 3 peras e 4 laranjas e quer dar uma fruta por dia a seu filho. De quantas maneiras ela pode fazer isto?

302 Um pai tem cinco moedas diferentes, que distribui entre seus 8 filhos, de modo que cada filho receba uma ou nenhuma moeda. De quantos modos diferentes ele pode fazer essa doação?

303 Num clube esportivo, com 30 atletas, deve-se formar uma equipe de 4 pessoas para participar de uma corrida de 1.000m. De quantas maneiras pode-se formar a equipe? E para formar uma equipe de 4 pessoas para participar de uma corrida de obstáculos de 100, 200, 400 e 800 metros?

304 De quantas maneiras as peças brancas podem ser colocadas na primeira fila do tabuleiro de xadrez? (2 cavalos, 2 torres, 2 bispos, o rei e a rainha).

305 Numa âgencia dos correios há 10 tipos de selos.

a) De quantas maneiras podem ser comprados 12 selos?
b) E 8 selos?
c) E 8 selos diferentes?

306 De um grupo formado por 7 homens e 4 mulheres devem ser escolhidas 6 pessoas, de forma que haja pelo menos 2 mulheres. De quantas maneiras a escolha pode ser feita?

307 Quantos números distintos de quatro algarismos, múltiplos de 4, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, se cada um destes pode ser empregado várias vezes na formação de um número?

308 São dadas duas retas paralelas distintas **r** e **s**. Toma-se **m** pontos em **r** e **n** pontos em **s**. Considere os segmentos determinados por esses pontos, com uma extremidade em **r** e outra em **s**. Em quantos pontos esses segmentos se cortam, sem considerar as extremidades, sabendo-se que em nenhum ponto se cortam mais que dois segmentos?

309 Quantos paralelogramos **m** retas paralelas distintas que se cruzam com **n** retas também paralelas distintas determinam?

310 Uma companhia é formado por 3 oficiais, 6 sargentos e 60 soldados rasos. De quantos modos podemos escolher um destacamento que tenha 1 oficial, 2 sargentos e 20 soldados rasos?

311 Em uma festa escolar há 12 meninas e 15 meninos. De quantos modos podemos escolher 4 casais para uma dança?

312 Em uma casa de aves exóticas há 3 galinhas, 4 patos e 2 gansos. De quantos modos podemos escolher grupos dessas aves de modo que em cada grupo tenha sempre galinha, pato e ganso?

313 De quantas formas podemos escolher entre 15 pessoas um grupo com qualquer número de pessoas?

314 De quantas maneiras podemos distribuir 12 moedas iguais entre 5 pessoas de modo que cada uma receba pelo menos uma moeda?

315 De quantas formas podemos distribuir 20 livros em 5 estantes, se cada estante pode conter os 20 livros?

316 De quantos modos pode-se colocar 5 aneis nos dedos de uma mão, sem colocar no polegar?

317 Uma pessoa deve encadernar 12 livros diferentes em vermelho, verde e marrom. De quantos modos ela poderá fazê-lo de modo que se tenha pelo menos um livro de cada cor?

318 De um grupo de 17 pessoas queremos escolher 12. De quantos modos podemos fazê-lo se duas dessas pessoas não podem estar juntas no grupo de 12?

319 Em uma casa com 3 pessoas tem 4 copos diferentes, 5 pires diferentes e 6 xícaras diferentes. De quantas maneiras pode-se por uma mesa para o chá se cada pessoa deve usar um copo, um pires e uma xícara.

320 De um casal sabemos que o marido tem 12 amigos: 5 mulheres e 7 homens e que sua esposa também tem outros 12 amigos: 7 mulheres e 5 homens. De quantas formas o casal pode convidar 6 homens e 6 mulheres de modo que 6 pessoas sejam amigas do homem e 6 sejam amigas da esposa?

321 Em uma urna há 10 fichas numeradas de 1 a 10. Retira-se 3 fichas dessa urna. De quantos modos a soma dos números das 3 fichas é igual a 9? Em quantos casos a soma não é menor que 9?

322 De quantas formas podemos retirar 6 cartas de um baralho de 52 cartas de modo entre as 6 cartas haja cartas dos quatro naipes?

323 Um coral é formado por 10 integrantes. De quantos modos podemos escolher 6 deles durante 3 dias, de modo que em cada dia os escolhidos formem um grupo diferente?

324 15 alunos formam 5 filas de 3 pessoas cada. Quantas vezes isto pode ser feito, de modo que em nenhuma fila haja dois alunos que já estiveram em outra?

325 De A até B são 999 Km. Ao longo do caminho há placas indicando as quilometragens até A e até B (0,999), (1,998), ... , (999,0). Quantas são as placas em que há apenas dois algarismos impressos?

326 Quantos números de seis algarismos existem nos quais a soma dos algarismos é par? (supondo-se o primeiro diferente de zero). E se tomarmos todos os números de 1 até 999.999?

327 Quantos números de 10 algarismos existem nos quais a soma dos algarismos é igual a três? (supondo-se o primeiro algarismo diferente de zero). E se tomarmos todos os números de 1 a 9.999.999.999?

328 Divide-se um quadrado em 16 quadrados iguais. De quantas maneiras podem ser pintados de branco, preto, vermelho e azul, de modo que em cada horizontal e em cada vertical estejam as quatro cores?

329 Há 7 exemplares de um livro, 8 de outro e 9 de um terceiro. De quantos modos eles podem ser distribuidos entre duas pessoas, de modo que cada uma receba 12 livros?

330 Se duas letras iguais não podem ser vizinhas, quantas são as permutações que se obtém com as letras da palavra:

a) tic-tac? b) tam-tam?

331 Quantos números de quatro algarismos podemos escrever com os algarismos do número 132.132?

332 Quantos números naturais menores que 1.000.000

a) contêm os algarismos 1, 2, 3 e 4?

b) contêm apenas os algarismos 1, 2, 3 e 4?

333 Achar a soma de todos os números de quadro algarismos que se obtém quando permutamos os algarismos do número dado, nos casos:

a) 1234 b) 1225 c) 1333 d) 1144

334 Achar a soma dos números de cinco algarismos que se obtém quando permutamos os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4.

335 Determine quantos números menores que 1.000.000 podemos escrever com os algarismos dados nos casos:

a) 8 e 9 b) 7, 8 e 9 c) 0, 8 e 9

336 Achar a soma de todos os números de três algarismos que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3 e 5.

337 Formando números de 5 algarismos, sem repetir nenhum, ache a soma de todos os números obtidos com os algarismos dados, nos casos:

a) 1, 2, 3, 4, 5

b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

338 Quantos números ímpares de 4 algarismos podemos obter com os algarismos do número 3.694?

339 Há quantos números de 6 algarismos de modo que 3 algarismos sejam pares e 3 sejam ímpares?

340 Quantos números de 9 algarismos distintos podemos obter?

341 Determine quantos são os números entre 0 e 999 que não são divisíveis pelos números dados, nos casos:

a) 5 e 7
b) 2, 3, 5 e7

342 Em quantos números de 0 a 999 aparecem:

a) o algarismo 9?
b) o algarismo 9 duas vezes?
c) o algarismo 0?
d) o algarismo 0 duas vezes?
e) os algarismos 0 e 9?
f) os algarismos 8 e 9?

343 Em quantos números de 0 a 999.999 não aparecem dois algarismos vizinhos iguais?

344 Quantos números

a) de quatro algarismos podemos formar com os algarismos do número 123.153?
b) de cinco algarismos podemos formar com os algarismos do número 12.335.233?

345 Quantos números de seis algarismos, de modo que não tenham dois algarismos vizinhos iguais, podemos formar com os algarismos do número 1.233.145.254?

346 Quantos números de cinco algarismos podemos formar com os algarismos do número 12.312.343, de modo que os três algarismos 3 não apareçam juntos?

347 De modo que não haja dois algarismos vizinhos iguais, de quantos modos podemos permutar os algarismos do número

a) 12.341.234
b) 12.345.254

348 De quantos modos podemos permutar os algarismos do número 1.234.114.546 de modo que não apareçam:

a) três algarismos iguais juntos?
b) dois algarismos iguais juntos?

349 De quantos modos podemos escolher dois dos números inteiros de 1 a 20, de modo que a soma deles seja ímpar?

350 De quantos modos podemos escolher três dos números inteiros de 1 a 30, de modo que a soma deles seja par?

351 Considere 20 pontos distintos sobre uma reta r.

a) Quantas retas esses pontos determinam?
b) Quantas semi-retas esses pontos determinam?
c) Quantos segmentos esses pontos determinam?

352 Considere 12 pontos distintos sobre uma circunferência.

a) Quantos segmentos esses pontos determinam?
b) Quantas retas eles determinam?
c) Sobre as retas do item b quantas semi-retas esses pontos determinam?
d) Quantos triângulos esses pontos determinam?
e) Quantos quadriláteros esses pontos determinam?
f) Quantos pentágonos eles determinam?

353 Sejam r e s duas retas paralelas distintas. Tomemos 7 pontos em r e 9 pontos em s.

a) Quantos segmentos esses pontos determinam?
b) Quantas retas esses pontos determinam?
c) Quantos triângulos eles determinam?
d) Quantos quadriláteros esses pontos determinam?

354 Sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ de um triângulo ABC, distintos de A, B e C, tomamos respectivamente 5 pontos, 7 pontos e 6 pontos.

a) Quantos segmentos esses pontos determinam?
b) Quantas retas eles determinam?
c) Quantos triângulos esses pontos determinam?
d) Quantos quadriláteros esses pontos determinam?
e) Quantos pentágonos esses pontos determinam?
f) Quantos hexágonos eles determinam?
(Todos os polígonos pedidos são convexos).

355 Considere 12 pontos na posição geral (3 quaisquer não são colineares) em um plano. Determine o número máximo de intersecções das retas determinadas por esses pontos, de modo que essas intersecções sejam distintas dos pontos dados.

356 Num plano são dados 15 pontos dos quais 6 estão alinhados e os outros são tais que 3 quaisquer não são colineares. Determine o número máximo de

intersecções das retas determinadas por esses pontos, intersecções estas, distintas dos pontos dados.

357 Quantas diagonais tem um

a) Icosaedro convexo?
b) Dadecaedro convexo?

358 Dado um hexágono convexo, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices desse hexágono?

359 Quantos são os triângulos cujas medidas dos lados pertencem ao conjunto {4m, 5m, 6m, 7m}?

360 Quantos paralelepípedos retângulos distintos podemos construir para os quais as medidas das arestas são números inteiros de 1 a 10?

Capítulo 4

Probabilidade

A - Experimentos Aleatórios

Um **experimento** se chama **aleatório** quando, realizado repetidamente nas mesmas condições, for impossível de se prever seu resultado.

O conjunto dos resultados possíveis para um experimento aleatório é, geralmente, conhecido e chamado de espaço amostral do experimento.

Exemplos:

- Lançar um dado e observar o número gravado na face voltada para cima.

- Jogar uma moeda três vezes em seguida e observar os trios ordenados obtidos.

- Observar o número de partos que ocorrem por dia num determinado hospital.

- Retirar cinco cartas de um baralho de 52 cartas e observar os conjuntos obtidos.

- Observar o índice pluviométrico diário de uma determinada estação de medição.

B - Espaço Amostral de um Experimento (E)

Espaço amostral (E) de um experimento é o conjunto dos resultados possíveis para esse experimento. Indicaremos n (E), ao número de elementos do espaço amostral.

Exemplos:

(1º) Experimento: jogar um dado comum (com 6 faces numeradas de 1 até 6).
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(E) = 6$

(2º) Experimento: jogar duas moedas (que é o mesmo que jogar uma mesma moeda duas vezes)
E = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}
$n(E) = 2 \cdot 2 = 4$

(3º) Retirar três bolas sucessivamente e sem reposição de uma urna contendo 3 bolas pretas e 4 brancas.
$E = (P, P, P), (P, P, B), (P, B, P), (B, P, P), (P, B, B), (B, P, B), (B, B, P), (B, B, B)\}$
$n(E) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

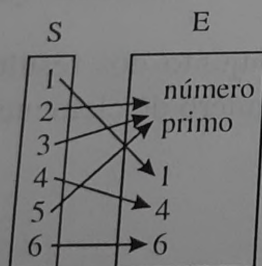
(4º) Experimento: sortear um segmento dentre os segmentos determinados pelos vértices de um pentágono ABCDE.
E = {{A, B}, {A, C}, {A, D}, {A, E}, {B, C}, {B, D}, {B, E}, {C, D}, {C, E},{D, E}}

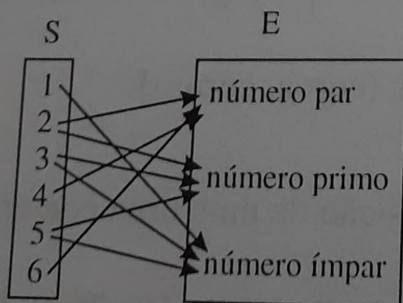
$n(E) = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$

Observações:
1ª) O espaço amostral de um experimento pode ser finito ou infinito.

2ª) Um mesmo experimento pode ser representado por diversos espaços amostrais, dependendo da conveniência ao se resolver um problema. Exemplo:

O experimento: "jogar um dado comum" pode ter os seguintes espaços amostrais:
E1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ou
E2 = {número par, número ímpar} ou
E3 = {número primo, 1, 4, 6}, etc.

Chamando de S o conjunto dos resultados do experimento, E pode seu um espaço amostral desse experimento se cada elemento de S tiver um único correspondente em E e se todo elemento de E for correspondente de pelo menos um elemento de S, (como se fosse uma função sobrejetora de S em E), Observe o exemplo:

E é um espaço amostral desse experimento

Observe, agora o contra-exemplo:

E não é um espaço amostral do experimento.

C – Evento

Dado um espaço amostral **E** associado a um experimento, chama-se **evento** (acontecimento) desse experimento a qualquer **subconjunto A de E.**

Se esse evento tiver um único elemento, será chamado de **evento simples** ou evento elementar

Exemplo:
Experimento: "jogar um dado comum"
Escolheremos o espaço amostral
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e, como exemplo, os seguintes eventos (subconjunto de E):

$A \rightarrow$ obter resultado par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
$B \rightarrow$ obter resultado primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$
$C \rightarrow$ obter resultado (par e primo) $\Rightarrow C = \{2\}$ (C é um evento simples)
$D \rightarrow$ obter resultado menor que $7 \Rightarrow D = \{x \in E \mid x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$
(D é chamado de **evento certo** ou certeza).
$F \rightarrow$ obter resultado não inteiro $\Rightarrow F = \{x \in E \mid x \text{ não é inteiro}\} = \varnothing$
(F é chamado de **evento impossível**).
Os eventos simples desse experimento são $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ e $\{6\}$.

D – Distribuição de Probabilidades
(Probabilidades dos eventos simples)

Consideremos um experimento com espaço amostral finito
$E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_m\}$ e os **números reais não negativos** $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ que são, respectivamente, as probabilidades dos eventos simples $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, ..., \{e_m\}$.

Nessas condições, dizemos que $p_1, p_2, ..., p_m$ definem uma **distribuição de probabilidades sobre E** se $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_m = 1$.

D.1– Probabilidade de um evento [P(A)]

Sendo dados: um experimento com espaço amostral finito
$E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_j, ..., e_m\}$,
sua distribuição de probabilidades
$p_1, p_2, p_3, ..., p_j, ..., p_m$
e o evento $A = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_j\}$, definimos **probabilidade de A** [indica-se P(A)] como sendo a soma das probabilidades dos eventos simples que constituem o evento A:

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_j$$

No caso particular em que $A = \varnothing$, definimos : $P(A) = 0$ (evento impossível)

Exemplo: Joga-se um dado comum, mas que tem a seguinte distribuição de probabilidades:

$p_1 = p_3 = p_4 = 0,1$
$p_2 = p_5 = 0,2$
$p_6 = 0, 3$

Nessas condições, determine a probabilidade dos seguintes eventos:

A → obter resultados par
B → obter resultado par **e** primo (interseção).
C → obter resultado par **ou** primo (união).
D → obter um número menor que 7.
F → obter um número maior que 6.
G → obter um número primo.
H → obter um número não primo.

Resolução: o espaço amostral é

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e notemos que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$. Assim sendo, temos $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 0,2 + 0,1 + 0,3$

$$P(A) = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%$$

$B = \{2\} \Rightarrow P(B) = p_2 = 0,2 = 20\%$

$C = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(C) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 0,9 = 90\%$

ou, de outro modo:

$P(C) = 1 - p_1 = 1 - 0,1 = 0,9$ pois $\{e_1\}$ é o evento complementar de C.

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$ (espaço amostral)

$P(D) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 = 100\%$

D é chamado de evento certo.

$F = \varnothing \Rightarrow P(F) = 0$ (evento impossível)

Nos eventos

$G = \{2, 3, 5\}$ e $H = \{1, 4, 6\}$ é importante perceber que

$G \cap H = \varnothing =$ e $G \cup H = E$, isto é, eles são complementares: $\overline{G} = H$

$P(G) = p_2 + p_3 + p_5 = 0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,5 = 50\%$

e $P(H) = P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,5 = 0,5 = 50\%$

ou, de outra forma:

$P(H) = p_1 + p_4 + p_6 = 0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5$

Exercícios

361 Escolha um **espaço amostral E** para cada um dos experimentos seguintes:

a) jogar uma moeda três vezes.
b) jogar um dado em forma de tetraedro, com as faces numeradas de 1 a 4 e observar a face voltada para a mesa.
c) Chamando de M um filho do sexo masculino e F, do sexo feminino, quais são os resultados possíveis para um casal que tem dois filhos?
d) E para um casal com 3 filhos?
e) Jogar duas vezes o "dado" do item (b).
f) Retirar duas bolas, sucessivamente e com reposição, de uma urna contendo 3 bolas: uma preta, uma branca e uma vermelha.

362 Entendendo, agora, espaço amostral como sendo o conjunto dos resultados possíveis de um experimento, determine o número de elementos de E [n(E)] em cada experimento dado:
a) Jogar dois dados comuns (faces numeradas de 1 a 6).
b) Sortear uma comissão de 3 pessoas dentre todas as comissões de 3 membros que se pode formar com 7 pessoas.
c) Observar as sequências de filhos possíveis (masculino ou feminino) para um casal que tem 5 filhos.
d) Jogar três vezes um dado comum.
e) Jogar uma moeda e, em seguida, um dado comum.
f) Retirar 3 bolas, sucessivamente e sem reposição, de uma urna contendo 3 bolas pretas e uma branca.
g) Sortear um segmento dentre os segmentos determinados pelos vértices de um prisma hexagonal. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$.

363 Sorteia-se uma etiqueta de uma urna que contém 7 etiquetas numeradas de 1 até 7. Determine, por enumeração, cada um dos eventos seguintes, subconjuntos do espaço amostral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:
a) $A \rightarrow$ obter número ímpar.
b) $B \rightarrow$ obter número primo.
c) $C \rightarrow$ obter número (ímpar **e** primo). Note que $C = A \cap B$.
d) $D \rightarrow$ obter número (ímpar **ou** primo). Observe: $D = A \cup B$.
e) $F \rightarrow$ obter resultado **não primo**. Observe: $F = \overline{B}$ (B complementar).
f) $G \rightarrow$ obter como resultado um número irracional.
g) $H \rightarrow$ obter resultado inteiro.

364 Sendo dada, no exercícios anterior, a seguinte distribuição de probabilidade sobre E

$p_1 = p_3 = p_5 = \frac{1}{14}$

$p_2 = p_4 = p_6 = \frac{1}{7}$ e $p_7 = \frac{5}{14}$, determine as probabilidades dos eventos A, B, C, D, F, G e H lá citados.

365 Joga-se duas vezes um **dado honesto** (todos os eventos simples têm a mesma probabilidade) com as 6 faces numeradas de 1 a 6. Observe, abaixo, um diagrama para se determinar seu espaço amostral:

1º resultado \ 2º resultado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Consultando este diagrama, responda:

a) Qual é o número de elementos do espaço amostral [n(E)]?
b) Qual é a probabilidade de cada evento simples desse experimento?
c) Qual é a probabilidade de obtermos soma dos pontos igual a 8?
d) Qual é a probabilidade de o 1º resultado ser igual ao 2º?
e) Qual é a probabilidade da soma dos pontos ser igual a 12?

f) Qual é a probabilidade de obtermos soma dos pontos igual a 13?
g) Qual a probabilidade de o 1º resultado ser menor que o segundo?
h) Qual a probabilidade de a soma dos pontos ser maior que 1?
i) Qual a probabilidade de que o 2º resultado seja um número par?

366 Joga-se um **dado viciado** com as faces numeradas de 1 a 6, tal que a probabilidade de cada face é proporcional ao número que está gravado nela. Nessas condições, determine a probabilidade de obter-se um número não primo.

367 (FUVEST/90 - 1º Fase) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saia com o dobro de freqüência da face 1, e que as outras faces saíam com a freqüência esperada em um dado não viciado. Qual a freqüência da face 1?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{1}{12}$

368 Um dado de 6 faces é constituído de tal forma que, se P(j) indica a probabilidade de cair o número j (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), tem-se $P(1) = P(2)$; $P(6) = 4 \cdot P(1)$; $P(3) = P(4) = P(5) = 2 \cdot P(1)$. Jogando-se este dado uma vez, que probabilidade é maior, a de sair número ímpar ou número par? Justifique sua resposta.

E - Espaço Amostral Equiprovável

O espaço amostral E de um experimento aleatório se diz **equiprovável** quando todos os eventos simples desse experimento têm a mesma probabilidade.

E.1 Probabilidade num espaço equiprovável [P(A)]

Sejam: um espaço amostral finito

$E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_j, \ldots, e_m\}$ com **m** elementos ($m \neq 0$) e um evento A, $A \subset E$, com **j** elementos, $A = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_j\}$.

Como **E** é equiprovável, temos:

$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_j = \ldots = p_m = x, x \in \mathbb{R}_+$ e $x + x + x + \ldots + x + \ldots + x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m}$, portanto, $P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_j = j \cdot \frac{1}{m}$, ou seja,

$$P(A) = \frac{j}{m}$$

Como n(E) = m e n(A) = j, podemos concluir:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}$$

ou, como é mais conhecida a definição de probabilidade de um evento **A** num espaço amostral equiprovável **E**:

$$P(A)=\frac{n^{\circ}\text{ de resultados que satisfazem ao evento A}}{n^{\circ}\text{ total de resultados do experimento}}$$

Em particular, se $A = \varnothing$ então $P(A) = 0$

Exemplos:

1º) Retirando-se uma bola de uma urna contendo 3 bolas brancas, 2 pretas e 5 vermelhas, qual é a probabilidade de que saia uma bola branca?

Resolução:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{n^{\circ}\text{ de bolas brancas}}{n^{\circ}\text{ total de bolas}}$$

$$P(A)=\frac{3}{10}=30\%$$

2º) Retirando-se simultaneamente 4 bolas da urna do exemplo anterior, qual é a probabilidade de obter-se 2 bolas brancas e 2 bolas vermelhas?

Resolução:

$E \to$ conjuntos de 4 bolas $\Rightarrow n(E) = C_{10,\,4}$

$A \to BBVV \Rightarrow n(A) = C_{3,\,2} \cdot C_{5,\,2}$

Portanto, temos:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{C_{3,2}\cdot C_{5,2}}{C_{10,4}}=\frac{3\cdot 10}{3\cdot 7\cdot 10}=\frac{1}{7}$$

Observações:

1ª) Para facilitar o entendimento dos problemas de probabilidade é conveniente salientar-se que:

a) Retirar bolas simultaneamente de uma urna é o mesmo que retirá-las sucessivamente e sem reposição.

*b) Jogar **n** dados ao mesmo tempo é equivalente a jogar **n** vezes em seguida o mesmo dado.*

2ª) De agora em diante, salvo aviso em contrário, consideraremos, sempre, os espaços amostrais finitos e equiprováveis.

F – Propriedades do Cálculo das Probabilidades

1ª) Probabilidade do evento impossível

Evento impossível $\Rightarrow A = \varnothing \Rightarrow n(A) = 0$, portanto, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{0}{n(E)} = 0$, pois $n(E) \neq 0$.

Assim sendo, concluímos

$P(\varnothing) = 0$ (evento impossível)

2ª) Probabilidade do evento certo

Evento certo $\Rightarrow A = E$, ou seja,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)} = 1 = 100\%$$

Então, concluímos:

$P(E) = 1$ (evento certo)

3ª) Probabilidade do evento A [P(A)]

São dados: o espaço amostral E e um subconjunto seu que é o evento A. Nessas condições, temos:

$$\varnothing \subset A \subset E \Rightarrow n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(E)$$

dividindo os membros dessa desigualdade por $n(E) \neq 0$, temos:

$$\frac{0}{n(E)} \leq \frac{n(A)}{n(E)} \leq \frac{n(E)}{n(E)}$$ e, então, concluímos:

$0 \leq P(A) \leq 1$, ou seja, a probabilidade de um evento A qualquer é sempre um número real entre zero e um, inclusive os extremos.

4ª) Eventos mutuamente exclusivos

Definição: dois eventos A e B, subconjuntos de um espaço amostral E, se dizem **mutuamente exclusivos** quando $A \cap B = \varnothing$, ou seja, quando A e B forem conjuntos disjuntos.

Exemplo: Joga-se um dado comum o espaço amostral é:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Consideremos, agora, os eventos:

A → o resultado é par

B → o resultado é divisor de 15

Assim sendo, temos:

$A = \{ x \in E \mid x \text{ é par}\} = \{2, 4, 6\}$
$B = \{x \in E \mid x \text{ é divisor de } 15\} = \{1, 3, 5\}$
$A \cap B = \varnothing$ então dizemos que A e B são dois eventos mutuamente exclusivos.

5ª) Probabilidade da união de dois eventos

Sejam os eventos A e B subconjuntos de um espaço amostral E.
Da teoria dos conjuntos sabemos que
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
dividindo tudo por $n(E) \neq 0$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$, ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Em particular se A e B forem eventos mutuamente exclusivos, teremos:
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ e, então, neste caso:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

quando $A \cap B \neq 0$

Observações:

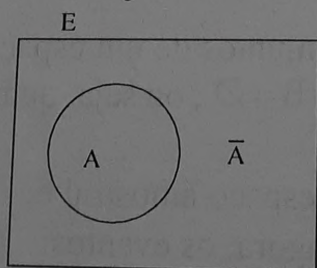
*1ª) É importante lembrar-se que A **ou** B significa a união de dois eventos e A **e** B é a interseção de dois eventos.*

2ª) É fácil demonstrar a seguinte propriedade, válida para a união de 3 eventos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6ª) Probabilidade do evento complementar

Sejam os eventos complementares A e A, subconjuntos do espaço amostral E de um experimento.

Da teoria dos conjuntos sabemos que $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = E$

e também que $n(A) + n(\overline{A}) = n(E)$

dividindo tudo por n(E), temos:

$$\frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\overline{A})}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)}$$ e, então, concluímos:

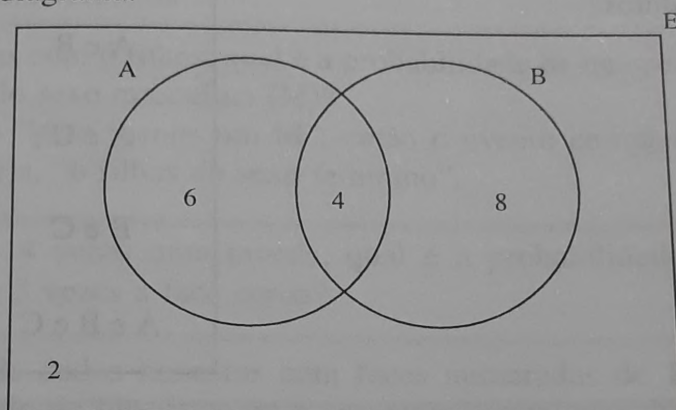
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Observação: desta igualdade é imediato obtermos:

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ ou ainda

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Exercícios

369 Observe o diagrama.

onde A e B são eventos do espaço amostral E e os números que lá aparecem, são os números de elementos de cada região indicada. Nessas condições, determine:

a) $n(A)$ b) $n(B)$ c) $n(A \cap B)$ d) $n(A \cup B)$

e) $n(\overline{A})$ f) $n(\overline{B})$ g) $n(E)$ h) $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$

i) $P(B)$ j) $P(A \cap B)$ k) $P(A \cup B)$ l) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

m) $P(\overline{A})$ n) $P(\overline{B})$ o) $1 - P(B)$

370 A respeito dos eventos A e B, subconjuntos de um espaço amostral E, sabe-se que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ e $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Nessas condições, pergunta-se:

a) A e B são eventos mutuamente exclusivos? Justifique.

b) Qual é a probabilidade do evento complementar de A, $P(\overline{A})$?

c) Quanto vale $P[E - (A \cup B)]$?

371 Sorteia-se uma bola de uma urna contendo 100 bolas numeradas de 1 a 100. Nessas condições pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 4?

b) E de ser múltiplo de 6?

c) E de ser múltiplo de (4 e 6) (interseção)?

d) E de ser múltiplo de (4 ou 6) (união)?

372 Num universo de 1000 pessoas, foi feita uma pesquisa a respeito do consumo de três produtos A, B e C, obtendo-se os seguintes resultados:

Produtos	Consumidores
A	430
B	560
C	470
A e B	265
A e C	275
B e C	300
A e B e C	230

Escolhendo-se, ao acaso, uma pessoa desse conjunto-universo, qual é a probabilidade de que essa pessoas não consuma nenhum dos três produtos?

373 Em cada item desde exercício damos um experimento e um evento A deste experimento. Descreva, em cada caso, o evento complementar $\overline{A}$:

a) Experimento: joga-se um dado
Evento A $\rightarrow$ obter resultado par

b) Experimento $\rightarrow$ retiram-se 5 cartas de baralho de 52 cartas
Evento A $\rightarrow$ obter pelo menos 2 ases

c) Experimento $\rightarrow$ jogam-se 4 moedas
Evento A $\rightarrow$ obter nenhuma vez "cara".

d) Experimento $\rightarrow$ observar famílias com 6 filhos
Evento A $\rightarrow$ obter famílias com pelo menos um filho do sexo feminino.

e) Experimento $\rightarrow$ sorteiam-se duas bolas com reposição de uma urna contendo 100 bolas numeradas de 1 a 100.
Evento A $\rightarrow$ Obter um par de números tais que o produto deles tenha algarismo das unidades diferente de zero.

f) Experimento $\rightarrow$ Retirar 3 bolas, sem reposição, de uma urna contendo 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 vermelhas.
Evento A $\rightarrow$ obter 3 bolas de cores distintas duas a duas.

374 Jogando-se três vezes um dado comum e honesto, qual é a probabalidade de obtermos soma doa pontos igual a 5?

375 Jogando-se duas vezes um dado em forma de icosaedro cujas faces são numeradas com números inteiros consecutivos de -10 até 9, qual é a probabilidade de obtermos soma dos pontos igual a zero?

376 Retirando-se, sem reposição, 5 cartas de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de obter-se exatamente 3 reis?

377 Retirando-se 4 bolas sucessivamente e sem reposição de uma urna contendo 6 bolas pretas e 4 bolas vermelhas, qual é a probabilidade de sair pelo menos uma bola vermelha?

378 Em famílias com 6 filhos, qual é a probabilidade de que pelo menos um filho seja do sexo masculino (M)?

Lembre-se : $A \rightarrow$ "pelo menos um M", então o evento complementar $\overline{A}$ é "nenhum M", ou seja, "6 filhos do sexo feminino".

379 Jogando-se 4 vezes uma moeda, qual é a probabilidade de se obter exatamente 3 vezes a face coroa?

380 Jogando três dados honestos com faces numeradas de 1 a 6,qual é a probabilidade de obtermos uma permutação qualquer de três números consecutivos? Observe: (2,3,4) e (3,2,4), por exemplo, satisfazem.

381 (CESCEA-68) Jogando-se 3 dados (ou um dado 3 vezes) qual a probabilidade de obtermos soma menor ou igual a 4?

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{27}$ d) $\frac{1}{18}$ e) $\frac{1}{54}$

382 (CESCEA-71)Tirando-se, ao acaso, 5 cartas de um baralho de 52 cartas, a probabilidade de sair exatamente 3 valetes é:

a) $\frac{4}{52}$ b) $\frac{4 \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}}$ c) $\frac{4 \cdot C_{52,2}}{C_{52,5}}$ d) $\frac{3}{52}$ e) não sei

383 (CESCEA-72) Qual a probabilidade de, jogando-se um dado, obter-se um número par de pontos?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) n.d.a.

384 (CESCEM-66) Considere as 120 permutações dos números 3,5, 6, 7 e 8. Uma delas é escolhida ao acaso e consideremos o número de cinco algarismos assim escolhido. Determine:

a) a probabilidade deste número ser par.
b) a probabilidade deste número ser maior que 70000.
c) a probabilidade deste número ser divisível por 3.

385 (CESCEM-70) Numa cidade com 1.000 eleitores vai haver uma eleição com dois candidatos A e B. É feita uma prévia em que os 1.000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Então a probabilidade de que A ganhe a eleição é:

a) 0,5 b) 1 c) 0,51 d) $\frac{490}{510}$

e) não pode ser calculado porque não é dado quantos eleitores entre os restantes 490 estão ainda indecisos

386 (CESCEM-66) Dois prêmios iguais são sorteados entre 5 pessoas, sendo duas brasileiras e três argentinas.Determine:

a) a probabilidade de serem premiados dois brasileiros.

b) a probabilidade de ser premiado pelo menos um argentino.

c) a probabilidade de serem premiados dois argentinos.

387 (CESCEM-67) Um dado especial de forma de icoseadro, tem suas 20 faces numeradas da seguinte forma: duas das faces têm o número zero; as 18 restantes têm os números, –9,–8,–7,...,–1,1,2,...,9. A probabilidade de que lançando os dois destes dados, tenhamos uma soma do número de pontos igual a 2, vale:

a) $\frac{9}{400}$ b) $\frac{18}{400}$ c) $\frac{10}{400}$ d) $\frac{19}{400}$ e) $\frac{2}{20}$

388 (CESGRANRIO-79) Um prédio de três andares com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. Determine a probabilidade de que cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado.

389 (CESGRANRIO-78) Três moedas, não viciadas,são lançadas simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter duas caras e uma coroa.

390 (FEI-80) No lançamento de dois dados honestos, calcular a probabilidade de:

a) a soma dos pontos ser ímpar. b) o produto dos pontos ser ímpar.

391 (MAUÁ-77) Lançado-se simultaneamente dois dados, cujas faces são numeradas de 1 a 6, qual a probabilidade de:

a) serem obtidos números cujo produto seja ímpar?

b) serem obtidos números cujo produto seja par?

392 (MAUÁ-80) Considere dois pequenos tetraedros com suas faces numeradas de 1 a 4.

Lançando-se aleatoriamente os dois tetraedros sobre uma mesa, qual a probabilidade de que as faces em contacto com a mesa:

a) tenham números iguais. b) tenham soma 4.

393 (FUVEST/77 - 2ªFase - 1º Concurso) Sorteiam-se dois número naturais ao acaso entre 101 e 1.000, inclusive, com reposição. Calcule a probabilidade de que o algarismo das unidades do produto dos números sorteados não seja zero.

394 (FUVEST/77 - 1ª Fase - 2º Concurso)Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior do que o da primeira é:

a) $\frac{72}{81}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{36}{81}$ d) $\frac{30}{81}$ e) $\frac{45}{81}$

395 (FUVEST/81 - 1ª Fase) Seis pessoas, A, B, C, D, E e F, vão atravessar um rio em 3 barcos. Distribuindo-se ao acaso pessoas de modo que fiquem duas em cada barco, a probabilidade de A atravessar junto com B, C junto com D e E junto com F, é:

a) 1 /5 b) 1 /10 c) 1 /15 d) 1 /20 e) 1 /25

396 (FUVEST-82 - 1ºFase) Considerando um polígono regular de n lados, $n \geq 4$, e tomando-se ao acaso uma das diagonais do polígono, a probabilidade de que ela passe pelo centro é

a) 0 se n é par b) $\frac{1}{2}$ se n é ímpar c) 1 se n é par

d) $\frac{1}{n}$ se n é ímpar e) $\frac{1}{n-3}$ se n é par

397 (FUVEST/84 - 1ºFase) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

a) 1 /2 b) 1 /3 c) 1 /4 d) 1 /5 e) 1 /6

398 (FUVEST/86 - 1º Fase)Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 20.Qual a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

a) $\frac{9}{38}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{8}{25}$

399 (FUVEST/90 - 2º Fase - 1º Concurso) Um fichário tem 25 fichas, etiquetadas de 11 a 35.

a) Retirando-se um ficha ao acaso, qual probabilidade é maior: de ter etiqueta par ou ímpar? Por que?

b) Retirando-se ao acaso duas fichas diferentes, calcule a probabilidade de que suas etiquetas tenham números consecutivos.

400 (FUVEST-GV/90 - 1º Fase) Dez livros, 7 dos quais de Ecomonia, são colocados aleatoriamente na prateleira de uma estante. Qual a probabilidade de que os 7 livros de Economia fiquem juntos?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{1}{30}$ d) $\frac{1}{5}$ e) 1

401 (FUVEST-GV/91 - 1º Fase) No jogo de sena seis números distintos são sorteados dentre os números 1,2,...,50. A probabilidade de que, numa extração, os seis números sorteados sejam ímpares vale aproximadamente:

a) 50% b) 1% c) 25% d) 10% e) 5%

402 (FUVEST/92 - 1º Fase - 1º Concurso) Numa urna há:

- uma bola numerada com o número 1;
- duas bolas com o número 2;
- três bolas com o número 3, e assim por diante, até n bolas com o número n .

Uma bola é retirada ao acaso desta urna. Admitindo-se que todas as bolas têm a mesma probabilidade de serem escolhidas, qual é, em função de n, a probabilidade de que o número da bola retirada seja par?

403 (FUVEST/93 - 1º Fase) Escolhe-se ao acaso três vértices distintos de um cubo. A probabilidade de que estes vértices pertençam a uma mesma face é:

a) $\frac{3}{14}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{5}{14}$ d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{13}{18}$

404 (FUVEST-GV/93) Uma urna contém 4n bolas coloridas de preto, azul, vermelho e verde. As bolas de cada cor são numeradas de 1 até n. Qual a probabilidade de que retirando-se ao acaso as bolas da urna ocorra cada um dos eventos abaixo?

a) As bolas pretas saiam uma depois da outra, isto é, entre duas bolas pretas não saia nenhuma bola de outra cor.

b) As bolas de mesma cor saiam com sua numeração em ordem crescente.

405 (CESCEA-72) Qual a probabilidade de que jogando-se um dado n vezes, saia pelo menos uma vez o número 6?

a) $\left[\frac{5}{6}\right]^n$ b) $1-\frac{5}{6}$ c) $\left[\frac{1}{6}\right]^n$ d) $1-\left[\frac{5}{6}\right]^n$ e) n. r. a.

406 (CESCEA-73) Lançando-se um dado três vezes, a probabilidade de cair um mesmo número, pelo menos duas vezes, é:

a) $\frac{2}{27}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{7}{216}$ d) não sei e) n. d. a.

407 (CESCEA-76) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento retirada de uma bola, e considere os eventos:
A = {a bola retirada possui um número múltiplo de 2}
B = { a bola retirada possui um número múltiplo de 5}
Então, a probabilidade do evento A U B é:

a) $\frac{13}{20}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{11}{20}$

408 (CESCEM-71) Em um espaço amostral {A, B} as probabilidades P(A) e P(B) valem, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Assinale qual das alternativas seguintes NÃO é verdadeira:

a) $A \cup B = S$ b) $\overline{A} \cup \overline{B} = \varnothing$ c) $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B}$
d) $\overline{A} \cup B = B$ e) $(A \cap B) \cup (A \cup B) = S$

O enunciado abaixo refere-se às questões 409, 410 e 411:
A tabela abaixo, dá a distribuição de probabilidades dos 4 tipos de sangue de indivíduos numa comunidade.

Tipos sanguíneos/Probabilidade	A	B	AB	O
De ter o tipo especificado	0,20			
De não ter o tipo especificado		0,90	0,95	

409 (CESCEM- 68) A probabilidade de que um indivíduo, sorteado ao acaso, desta comunidade tenha o tipo sangüíneo O vale:

a) 0,267 b) 0,65 c) 0,80 d) 0,95
e) nenhuma das anteriores

410 (CESCEM- 68) A probabilidade de que dois indivíduos, sorteados ao acaso, desta comunidade, tenham um o tipo A e outro o tipo B, vale:

a) 0,60 b) 0,18 c) 0,04 d) 0,02 e) 0,30

411 (CESCEM- 68) A probabilidade de que um indivíduo sorteado ao acaso, desta comunidade, não tenha o tipo B ou não tenha o tipo AB vale:

a) 0,855 b) 1,85 c) 0,850 d) 1,0
e) nenhuma das anteriores

412 (CESCEM-71) Um experimento consiste no lançamento de um cubo cujas faces estão numeradas de 1 a 6. Seja E_i o evento: sair a face que contém o número i (i=1,2, ..., 6). Seja, ainda, $P(E_i)$ a probabilidade de ocorrência do evento E_i, onde $P(E_i) = \frac{i}{21}$

Suponhamos construída a teoria das probabilidades baseada nos três axiomas:

$P(A) \geq 0$ (I)

$P(S) = 1$ (II)

$P(B \cap C) = P(B) + P(C)$ (III)

onde A, B e C são eventos do espaço amostral S; B e C são eventos mutuamente exclusivos.

Nestas condições, as probabilidades definidas no experimento anterior;

a) não satisfazem a nenhum dos três axiomas
b) satsifazem somente ao axioma I.
c) satsifazem somente ao axioma II
d) satisfazem somente aos axiomas I e II
e) satisfazem aos axiomas I, II e III

413 (FUVEST/77 - 2ª fase - 2º concurso) A probabilidade de que a população atual de um país seja de 110 milhões ou mais é de 95%. A probabilidade de ser 110 milhões ou menos é de 8%. Calcule a probabilidade de ser 110 milhões.

414 (FUVEST/92 - 2ª fase - 2º concurso) Dez jogadores, convocados para compor um time de basquete e disputar um campeonato, são numerados de 1 a 10. Por sorteio, cinco jogadores são escolhidos para iniciar a primeira partida.

a) Qual a probabilidade de que os jogadores de números 1 e 7 iniciem jogando a primeira partida?
b) Qual a probabilidade de que pelo menos um desses dois jogadores (1 e 7) inicie jogando a primeira partida?

G – Probabilidade Condicional

Vamos inicialmente resolver, como exemplo, o seguinte problema:

"José e Pedro observam os finais dos números gravados nas placas dos automóveis que passam pela esquina onde estão. Qual é a probabilidade de que a placa do automóvel que passou termine em algarismo primo, sabendo-se que é par?"

Resolução:

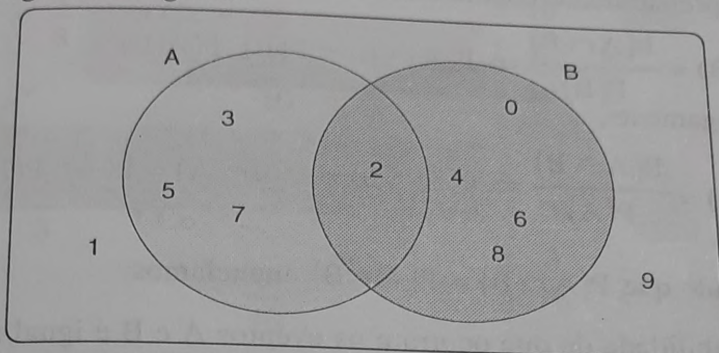
Espaço amostral $\rightarrow$ $E = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$

Evento A $\rightarrow$ a placa termina em algarismo primo $A = \{2, 3, 5, 7\}$ (é o evento de que se procura calcular a probabilidade).

Evento B $\rightarrow$ a placa termina em algarismo par $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (é o evento que se sabe que já ocorreu).

Sabemos que: $P(A) = \dfrac{4}{10}$; $P(B) = \dfrac{5}{10}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ pois $A \cap B = \{2\}$

Observemos agora, o diagrama:

Indica-se $P(A|B)$ a probabilidade de ocorrer A, sabendo-se que B já ocorreu. Lê-se: "probabilidade de A dado B".

Assim sendo, com já se sabe que B ocorreu, o novo espaço amostral passa a ser $E' = B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ chamado de espaço amostral reduzido.

O evento de que se procura a probabilidade, passa a ser:

$$A' = A \cap B = \{2\} \text{ e, portanto, } P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{5}$$

ou, de outro modo, para obter um resultado em função das probabilidades, temos:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\dfrac{n(B)}{n(E)}}$$

e, finalmente, $P(A|B)\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ que, aplicado ao nosso exemplo, implica:

$$P(A \mid B) = \frac{\dfrac{1}{10}}{\dfrac{5}{10}} = \frac{1}{5} = 20\%$$

G.1 – Probabilidade de A dado B [P(A | B)]

Definição: Dados os eventos A e B ($B \neq 0$), subconjuntos do espaço amostral E, a probabilidade condicional de ocorrer A sabendo-se que B já ocorreu é:

$$P(A|B)\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

lê-se **probabilidade de A dado B.**

G2 - Multiplicação de probabilidades

Dados os eventos não vazios A e B de um espaço amostral E, temos, pela definição de probabilidade condicional:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

e, analogamente,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Lembrando que $P(A \cap B) = P(A \text{ e } B)$ enunciamos:

"A probabilidade de que ocorram os eventos A e B é igual ao produto da probabilidade de que ocorra um deles pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo-se que o primeiro já ocorreu."

Exemplos

1º) Sorteando-se sucessivamente e sem reposição, duas bolas de uma urna contendo 4 bolas pretas e vermelhas, qual é a probabilidade de obter-se vermelha e preta, nesta ordem?

Resolução:

V – 1ª bola é vermelha

P – 2ª bola é preta

4P
6V

$$P(V \cap P) = P(V \text{ e } P) = P(V) \cdot P(P \mid V)$$

$$P(V \cap P) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

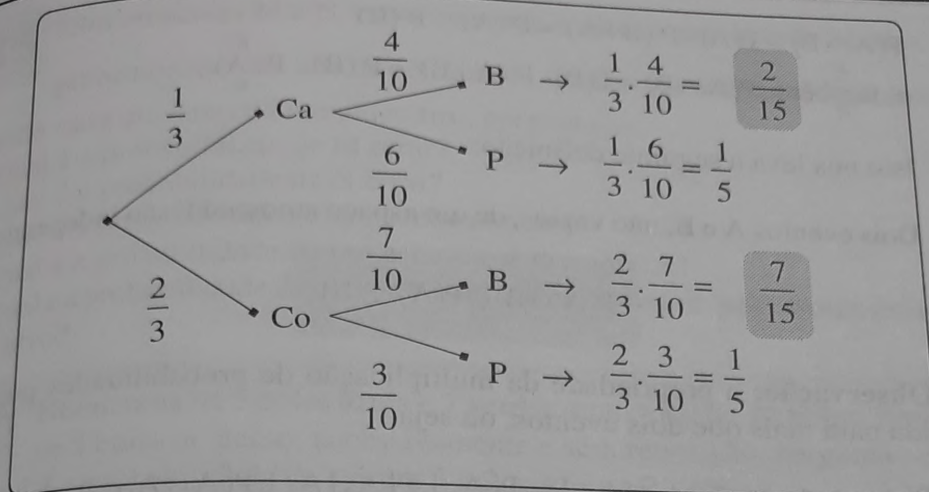
Resposta: $\frac{4}{15}$ é a probabilidade de que a 1ª bola seja vermelha e a segunda seja preta.

2º) Uma moeda é construída de tal forma que P (cara) = $\frac{1}{3}$ e P (coroa) = $\frac{2}{3}$; uma urna (I) tem 4 bolas brancas e 6 pretas; uma urna (II) tem 7 bolas brancas e 3 pretas. Joga-se a moeda e, em seguida, retira-se uma bola de (I), se saiu cara ou uma bola de (II), se saiu coroa. Qual é a probabilidade de que a bola sorteada seja branca?

Resolução:

É útil, neste caso, fazer-se uma árvore de possibilidades:

4B 6P	7B 3P
(I)	(II)

- $\frac{1}{3}$ Ca
  - $\frac{4}{10}$ B $\rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} = \frac{2}{15}$
  - $\frac{6}{10}$ P $\rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} = \frac{1}{5}$
- $\frac{2}{3}$ Co
  - $\frac{7}{10}$ B $\rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{10} = \frac{7}{15}$
  - $\frac{3}{10}$ P $\rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

$$P\ (\text{Ca e B}) = P\ (\text{Ca}) \bullet P\ (\text{B} \mid \text{Ca}) = \frac{2}{15}$$

$$P\ (\text{Ca e P}) = P\ (\text{Ca}) \bullet P\ (\text{P} \mid \text{Ca}) = \frac{1}{5}$$

$$P\ (\text{Co e B}) = P\ (\text{Co}) \bullet P\ (\text{B} \mid \text{Co}) = \frac{7}{15}$$

$$P\ (\text{Co e P}) = P\ (\text{Co}) \bullet P\ (\text{P} \mid \text{Co}) = \frac{1}{5}$$

Como o evento que nos interesssa é "sortear uma bola branca", temos:

$P\ (\text{branca}) = P\ (\text{Ca e B}) + P\ (\text{Co e B})$

[Somamos as probabilidades pois os eventos (cara e branca) e (coroa e branca) são mutuamente exclusivos].

$$P\ (\text{Branca}) = \frac{2}{15} + \frac{7}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Resposta: a probabilidade de se sortear uma bola branca é $\frac{3}{5} = 60\%$

G3 - Eventos independentes

Dois eventos A e B, não vazios, de um espaço amostral E são **independentes** quando o fato de um ocorrer não afeta a probabilidade de que o outro ocorra e, portanto,

$P\ (A \mid B) = P(A)$ e $P\ (B \mid A) = P(B)$, então, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \ . \ P(B)$$

e, também, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(B) \ . \ P(A)$

Isto nos leva à seguinte definição:

Dois eventos A e B, não vazios, de um espaço amostral E são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observação: a propriedade da multiplicação de probabilidades pode ser estendida para mais que dois eventos, ou seja,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_K) = P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1 \text{ e } A_2)\ldots$$

Exemplo

Jogando-se dois, calcule a probabilidade dos eventos:

A $\Rightarrow$ obter diferença dos pontos (maior menos o menor), igual a 3

B $\Rightarrow$ obter pelo menos um resultado igual a 2

Verifique, a seguir, se os eventos são independentes:

Resolução

$n(E) = 6 \cdot 6 = 36$

$A = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$

$(A \cap B) = \{(2, 5), (5, 2)\}$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A).P(B) = \frac{1}{6}.\frac{11}{36} = \frac{11}{216}$$

e, como $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

os eventos, **não são independentes.**

415 Dois atiradores M e N, estão treinando e sabe-se que quando M atira, tem probabilidade $\frac{3}{4}$ de acertar e N, quando atira, tem probabilidade $\frac{5}{6}$ de acertar. Quando cada um deles dá um único tiro, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de M errar?
b) Qual é a probabilidade de N errar?
c) Qual é a probabilidade de que ambos errem?
d) Qual é a probabilidade de um errar e o outro acertar?
e) Qual e a probabilidade de que o alvo seja atingido, isto é, pelo menos um acertar o alvo?

416 Numa urna há 5 bolas azuis e 7 verdes, num total de 12 bolas. Retirando-se 5 bolas ao acaso, sucessivamente e sem reposição, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de sairem 3 bolas azuis e 2 verdes?
b) Qual é a probabilidade de sairem duas bolas verdes e 3 azuis, nesta ordem?
c) Qual é a probabilidade de que se obtenha todas bolas verdes?
d) Qual é a probabilidade de obter-se pelo menos uma bola azul?

417 Numa fábrica, a máquina X produz 35% do total da produção, a máquina Y 40% e a máquina Z os restantes 25%. Da produção de X, 2% apresenta defeito, da produção de Y 1,5% apresenta defeito e da produção de A, 0,8% apresenta defeito. Num dia em que a produção total das 3 máquinas foi de 20.000 peças, uma delas foi tirada ao acaso e verificou-se que era defeituosa. Qual a probabilidade de que essa peça tenha sido produzida na máquina X?

418 Dados os eventos A e B de um espaço amostral E, sabe-se que:

$$P(A|B) = \frac{3}{5};\ P(B) = \frac{11}{20} \text{ e } P(B|A) = \frac{7}{3}.$$ Pergunta-se:

a) Quanto vale $P(A \cap B)$?
b) Esses eventos são independentes?
c) Esses eventos são mutuamente exclusivos?

419 As probabilidades de 3 alunos A, B e C resolverem separadamente, um determinado problema são respectivamente 40%, 50% e 60%. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

420 Dispomos de três urnas A, B e C com as seguintes composições:

A - 4 bolas vermelhas e duas pretas
B - 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 4 pretas
C - 6 bolas pretas e 5 brancas.

Retira-se uma bola de A e coloca-se na urna B, a seguir retira-se uma bola de B e coloca-se em C. Retirando-se uma bola de C, qual é a probabilidade desta ser vermelha ou branca?

421 A probabilidade de um atirador acertar um alvo é $\frac{1}{3}$ e a de um atirador B acertar o mesmo alvo é $\frac{1}{5}$. Se cada um atira uma vez, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade do alvo ser atingido?

b) Se o alvo foi atingido apenas uma vez, qual é a probabilidade de ter sido pelo atirador B?

422 Um atirador acerta o alvo com uma probabilidade igual a $\frac{3}{4}$. Supondo que ele atire n vezes em seguida, qual é o número n mínimo de tiros que ele deve dar, de modo que a probabilidade de que ele atinja o alvo seja maior que 99,21875%

Dado: $99{,}21875\% = \frac{127}{128}$

423 (CESCEM-70) De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química sabe-se que:

1. 30 destinam-se à Matemática e destes, 20 são do sexo masculino.
2. O total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química.
3. Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nestas condições, sorteando-se um aluno ao acaso do grupo total e sabendo-se que é do sexo feminino, a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática vale:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

424 (CESCEM-70) Dois indivíduos A e B vão jogar cara ou coroa com uma moeda honesta. Eles combinam lançar a moeda 5 vezes e ganha o jogo aquele que ganhar em 3 ou mais lançamentos. Cada um aposta 28 cruzeiros. Feitos os dois primeiros lançamentos, em ambos dos quais A vence, eles resolvem encerrar o jogo. Do ponto de vista probabilístico de que forma devem ser repartidos os 56 cruzeiros?

a) metade para cada um
b) 42 para A e 14 para B
c) 49 para A e 7 para B
d) tudo para A
e) nenhuma das anteriores

O enunciado seguinte se refere aos exercícios 425 e 426:

Sabendo-se que os erros de impressão tipográfica, por página impressa, se distribuem de acordo com as seguintes probabilidades:

Nº de erros por página	Probabilidades
0	0,70
1	0,15
2	0,10
3	0,02
4	0,02
5 ou mais	0,01

Nestas condições:

425 (CESCEM-71) A probabilidade de que numa página impressa existam estritamente mais do que três erros tipográficos vale:

a) 0,05 b) 0,03 c) 0,02 d) 0,0003 e) 0,0002

426 (CESCEM -71) A probabilidade de que em duas páginas impressas existam no total exatamente quatro erros tipográficos vale:

a) 0,0200 b) 0,0270 c) 0,0440 d) 0,4900 e) 0,7000

427 (CESCEM-68) Uma urna contém 1 bola preta e 9 brancas. Uma segunda urna contém x bolas pretas e as restantes brancas, num total de 10 bolas. Uma bola é extraída ao acaso da primeira urna e colocada sem que se veja sua cor na segunda urna. Então, uma bola é extraída da segunda urna. A probabilidade de que esta seja preta vale:

a) $\frac{x}{10}+\frac{1}{10}$ b) $\frac{x}{11}+\frac{1}{10}$ c) $\frac{x+1}{11}$ d) $\frac{x}{10}+\frac{1}{110}$ e) $\frac{x}{11}+\frac{1}{110}$

428 (CESCEM-68) Uma urna contém 1 bola preta e 9 brancas. Uma segunda urna contém x bolas pretas e as restantes brancas num total de 10 bolas. Um primeiro experimento consite em retirar, ao acaso, uma bola de cada urna. Num segundo experimento, as bolas das duas urnas são reunidas e destas, duas bolas são retiradas ao acaso. O valor mínimo de x a fim de que a probabilidade de saírem duas bolas pretas seja maior no segundo do que no primeiro experimento é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

429 (CESCEM-71) Em uma sala existem 5 crianças: uma brasileira, uma itailiana, uma japonesa, uma inglesa e uma francesa. Em uma urna existem 5 bandeiras correspondentes aos países de origem destas crianças: Brasil, Itália, Japão, Inglaterra e França. Uma criança e uma bandeira são selecionadas ao acaso, respectivamente, da sala e da urna. A probabilidade de que a criança sorteada não receba sua bandeira vale:

a) $\frac{1}{25}$ b) $\frac{5}{25}$ c) $\frac{25}{25}$ d) $\frac{20}{25}$ e) $\frac{5}{20}$

430 (CESCEM-71) Têm-se duas moedas das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomada ao acaso é lançada. A probabilidae de se obter cara é:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$

c) estritamente maior do que $\frac{1}{2}$, não se pondendo afirmar mais nada

d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{6}$

431 (SANTA CASA-77) Numa gaveta há 10 pares distintos de meias, mas ambos pés de um dos pares estão rasgados. Tirando-se da gaveta um pé de meia por vez, ao acaso, a probabilidade de tirarmos dois pés de meia do mesmo par, não rasgados, fazendo 2 retiradas é:

a) $\frac{379}{380}$ b) $\frac{306}{380}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{380}$ e) $\frac{18}{380}$

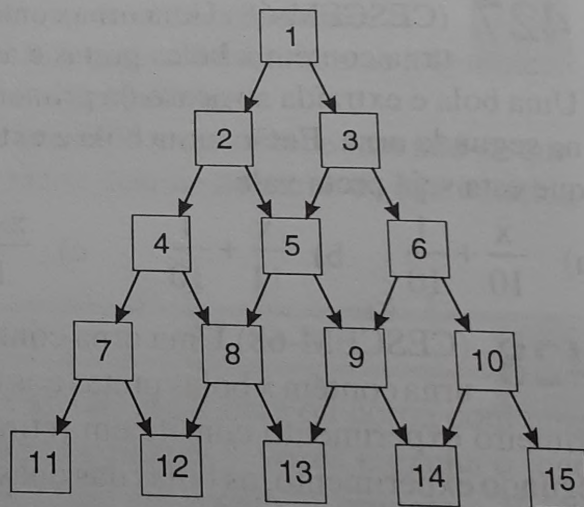
432 (SANTA CASA-77) Dispõe-se de um mapa. Dispõe-se também de um dado com 3 faces vermelhas e 3 faces azuis. Considerando as regras:

I - partindo do quadro 1, pode-se caminhar, no sentindo indicado pelas setas para os demais quadros, a cada lançamento do dado.

II - lançando-se o dado, se sair face azul, segue-se pela seta da direita até o quadro seguinte.

III - lançando-se o dado, se sair face vermelha, segue-se pela seta da esquerda atéo quadro seguinte.

A probabilidade de chegar ao quadro 13, partindo-se de 1, é:

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{4}{16}$ c) $\frac{6}{16}$ d) $\frac{8}{16}$ e) $\frac{12}{16}$

433 (FEI -77 - Julho) Uma urna contém 5 bolas vermelhas e dez bolas verdes não discerníveis quando tocadas. Retira-se simultaneamente quatro bolas da urna. Calcule a probabilidade de se retiar exatamente duas bolas verdes.

434 (CESGRANRIO-77) Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e mostra a um jogador. A probabilidade da face que o juiz vê ser vemelha e da outra face, mostrada ao jogador ser amarela é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

435 (FUVEST 77- 1ª Fase - 1º Concurso) Numa urna são depositadas n etiquetas numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade de que os números sorteados sejam consecutivos?

a) $\frac{(n-2)!}{n!}$ b) $\frac{(n-3)!}{n!}$ c) $\frac{(n-2)!}{3!n!}$

d) $\frac{(n-2)!3!}{n!}$ e) $6(n-2)(n-1)$

436 (FUVEST 80 - 2ª Fase)Uma urna contém 3 bolas: uma verde, uma azul e uma branca. Tira-se uma bola ao acaso, registra-se a cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se essa experiência mais duas vezes. Qual a probabilidade de serem registradas três cores distintas?

437 (FUVEST 81- 2ª Fase) Duas pessoas A e B jogam dado alternadamente, começando com A, até que uma delas obtenha um 6, a primeira que obtiver o 6 ganha o jogo.

a) Qual a probabilidade de A ganhar na 1ª jogada?
b) Qual a probabilidade de B ganhar na 2ª jogada?
c) Calcule a probabilidade de A ganhar o jogo.

438 (FUVEST 83 - 1ª Fase) Escolhendo-se ao acaso duas arestas de um cubo, a probabilidade delas serem reversas é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{5}{11}$

439 (FUVEST 83 - 2ª Fase) Duas pessoas A e B arremessam moedas. Se A faz dois aremessos e B faz um, qual a probabilidade de A obter o mesmo número de "coroas" que B?

440 (FUVEST 85 - 2ª Fase) Em uma loteria com 30 bilhetes, 4 são premiados. Comprando-se 3 bilhetes, qual a probabilidade de:

a) nenhum deles ser premiado?
b) apenas um ser premiado?

441 (FUVEST /GV 90 - 2ª Fase) a) Construa o espaço amostral formado pelas oito possibilidades de distribuição de sexo (M ou F) dos três filhos de um casal. Determine nesse espaço os subconjuntos corepsondentes aos eventos:

A – existem crianças de sexos diferentes.

B – existem pelo menos duas meninas.

b) Supondo que as oito possibilidades são igualmente prováveis, mostre que A e B são eventos independentes.

442 (FUVEST /GV 92 - 2ª Fase) Uma urna contém cinco bolas brancas, três vermelhas e duas pretas. As bolas são retiradas ao acaso da urna, uma de cada vez, sem reposição.

a) Qual é a probabilidade de que a última bola a ser retirada da urna seja preta?

b) Qual é a probabilidade de que a primeira bola retirada da urna seja branca e a última seja vermelha?

443 (FUVEST /GV 93 - 2ª Fase) Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (todas as seis faces têm probabilidades iguais). Com relação a esse experimento considere os seguintes eventos:

I O resultado do lançamento é par.

II O resultado do lançamento é estritamente maior do que 4.

III O resultado é múltiplo de 3.

a) I e II são eventos independentes?

b) II e III são eventos independentes?

Justifique suas respostas.

444 (FUVEST /GV 90 - 1ª Fase) Uma folha quadrada de papel quadriculado contém n^2 quadradinhos $(n \geq 2)$. Escolhendo-se, ao acaso, dois quadradinhos distintos, a probabilidade de que eles tenham um lado comum é:

a) $\dfrac{2}{n+1}$ b) $\dfrac{4}{n(n+1)}$ c) $\dfrac{2}{n(n+1)}$ d) $\dfrac{1}{4n(n+1)}$ e) $\dfrac{n-1}{n(n+1)}$

445 (CESCEM-69) Um dado de 6 faces é construído de tal forma que, se P(j) indica a probabilidade de cair o número j (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), temos que P (1) = P (2), P (6) = 4 P (1), P (3)= P (4) = P (5) = 2 P (1). Jogando-se este dado duas vezes, a probabilidade de obtermos um par de 6 é:

a) $\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{1}{8}$ c) $\dfrac{1}{9}$ d) zero e) n. r. a.

446 (CESCEM-67) Qual é menor, a probabilidade de obtermos 50% de caras no lançamento de 4 moedas ou 50% de caras no lançamento de 40 moedas?

447 (CESCEM-71) Em um jogo de cara ou coroa, em cada tentativa, a moeda é lançada 3 vezes consecutivas. Uma tentativa é considerada um sucesso se o número de vezes que se obtém cara supera estritamente o número de vezes que se obtém coroa. A probabilidade de se obterem 2 sucessos nas 2 primeiras tentativas é:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{13}{16}$ e) $\frac{1}{64}$

448 (CESCEA-71) A probabilidade de se ter pelo menos 2 caras num lançamento de 3 moedas é:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) n. r. a.

449 (CESCEA-74) Lançado-se 4 vezes uma moeda honesta, a probabilidade de que ocorra cara exatamente 3 vezes é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{7}{16}$ d) $\frac{1}{4}$ e) não sei

Exercícios Suplementares

450 Sendo $p_1, p_2, p_3 \in R_+$ uma distribuição de probabilidades sobre o espaço amostral $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, determinar p_1 nos seguintes casos:

a) sabendo que $p_2 = \frac{1}{4}$ e $p_3 = \frac{1}{6}$

b) sabendo que $p_1 = 3p_3$ e $p_2 = \frac{1}{2}$

c) sabendo que $p_1 = 2p_2$ e $p_2 = 3p_3$

d) sabendo que $P(\{e_2, e_3\}) = 4\,p_1$

451 Lance um dado e observe o número da face voltada para cima. Qual a probabilidade de que esse número seja:

a) par? b) ímpar? c) menor que 8?
d) maior que 6? e) par ou ímpar? f) primo ou ímpar?
g) primo ou par? h) primo e ímpar? i) primo e par?

452 Lance dois dados. Qual a probabilidade de que :

a) a soma seja 4?
b) a soma seja 7?
c) a soma seja maior que 8?
d) a soma seja 3 ou 9?
e) a soma seja múltiplo de 4?
f) o mdc deles seja diferente de um?
g) os números sejam iguais e com soma maior que 5?

453 Joga-se uma moeda e um dado. Qual a probabilidade de obtermos:

a) um número maior que 2? b) um número maior que 3 ou cara?
c) um número maior que 2 e coroa?

454 Lance 3 moedas. Qual a probabilidade de se obter:
a) uma cara?
b) uma única cara? c) 3 caras ou 3 coroas?

455 Num grupo de 6 alunos, determine a probabilidade de:

a) todos serem do sexo masculino
b) o número de alunos do sexo masculino ser maior do que o do sexo feminino.
c) nenhum aluno ser do sexo masculino.

456 Numa urna existem 4 bolas verdes, 2 amarelas e 6 marrons. Qual a probabilidade de, retirando-se uma bola, esta ser:
a) verde? b) amarela? c) marrom?

457 Joga-se um dado duas vezes, determine a probabilidade de:

a) os resultados obtidos serem iguais
b) o produto dos resultados obtidos ser primo
c) o produto dos resltados obtidos ser par.
d) em nenhum resultado aparecer o resultado 5.
e) o resultado obtido na primeira ser maior que 3 e na segunda jogada ser menor que 4.

458 Joga-se uma moeda 4 vezes. Qual a probabilidade de se obter:

a) pelo menos uma cara? b) duas caras consecutivas?
c) três coroas consecutivas? d) coroas nos dois últimos lançamentos?

459 Uma urna possui etiquetas numeradas com 1, 2, 5, 6, 10, 15 e 30. Retirando-se duas etiquetas de uma só vez qual a probabilidade de obtermos:
a) soma dos resultados 25? b) soma dos resultados menor que 25?

460 Joga-se um dado 3 vezes (ou três dados uma vez), qual a probabilidade de obtermos:
a) soma 5? b) soma menor ou igual a 4?
c) soma 7 ou soma 9? d) soma máxima?

461 Dois meninos tiram par ou ímpar. Determine a probabilidade de ocorrer:
a) 5 dedos b) mais que 5 dedos
c) um médio e dois indicadores? d) dois médios?

462 Quatro cavalos, A, B, C e D participam de uma corrida. A probabilidade de A ganhar é o triplo da de B, a de C é o triplo de D e a de D é a metade de A. Determine a probabilidade:

a) que cada um tem de ganhar. b) de que B ou D ganhe.

463 Retira-se uma carta de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de se obter:

a) uma carta de copas.
b) uma figura (valete, dama ou rei).
c) uma figura de paus.

464 Duas cartas são selecionadas, de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de que:

a) ambas sejam de espada. b) uma seja de espada e a outra seja de copa.

465 Numa prova são sorteados 3 dos 6 pontos numerados de 1 a 6. Determine a probabilidade de:

a) ser sorteado o ponto 6.
b) serem sorteados os pontos 1 e 3.
d) serem sorteados os pontos 2 ou 5.
d) serem sorteados o ponto 1 ou o ponto 2 ou o ponto 3.
e) serem sorteados os pontos 2, 3 e 4.
f) não ser sorteado o ponto 1.

466 Um escolar é aprovado, se acertar pelo menos duas questões das 3 que são sorteadas entre 7 questões (numeradas de 1 a 7). Qual a probabilidade do escolar ser aprovado se sabe responder apenas as questões 1, 3 e 7?

467 Qual a probabilidade de que, extraindo-se, de uma só vez, 5 bolas de uma urna que contém 3 bolas pretas, 2 vemelhas, 4 azuis e uma amarela, saiam 2 pretas, 2 azuis e a amarela?

468 Uma urna A contém 3 bolas pretas e 5 brancas, outra urna B contém 5 bolas pretas e 6 brancas. Tirando-se, ao mesmo tempo, 2 bolas da 1ª urna e 3 da 2ª urna, qual a probabilidade de que as 5 bolas assim extraídas sejam da mesma cor?

469 De um lote de 15 parafusos, 5 são defeituosos. Escolhendo 3 parafusos desse lote, determine a probabilidade de que:

a) os três parafusos escolhidos sejam defeituosos.
b) os três não sejam defeituosos.
c) pelo menos um seja defeituoso.

470 De um jogo com 32 cartas (A, 2, 3, 4, 5, J, Q, K) retira-se 3 cartas ao acaso. Qual a probabilidade de se obter:

a) as três de uma mesma cor?
b) três reis
c) um ás e 2 reis
d) três cartas pretas
e) duas vermelhas e uma preta
f) uma ás, um rei e uma dama
g) um ouro, uma espada e um paus.

471 Uma urna contém 2 bolas brancas, 4 azuis e 6 vermelhas. Extraindo-se uma bola, qual é a possbilidade de que:

a) seja branca?
b) seja vermelha?
c) seja azul?
d) que não seja branca?
e) não seja azul?
f) não seja vermelha?

472 Jogando-se uma moeda 6 vezes, qual a probabilidade de obtermos:

a) 4 coroas e 2 caras?
b) 1 coroa e 5 caras?
c) somente caras?
d) no mínimo 3 coroas?
e) no máximo 2 coroas?

473 Em uma comunidade existem 2 clubes A e B. Sabendo-se que 300 pessoas são sócias do clube A, 100 do clube B, 20 de ambos e 200 não freqüentam clubes. Pergunta-se:

a) Quantas pessoas possui a comunidade?
b) Qual a probabilidade de que uma das pessoas escolhida ao acaso pertença a apenas um clube?
c) Qual a probabilidade de que pertença apenas ao clube A?
d) Qual a probabilidade de que pertença apenas ao clube B?
e) Qual a probabilidae de que pertença a ambos os clubes?

474 Dada a matriz $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ onde a, b, c, d $\in$ Z e são escolhidos aleatoriamente, determine:

a) a probabilidade de det(A) ser ímpar
b) a probabilidade de det (A) ser par.

475 Três homens e quatro mulheres participam de um torneio de xadrez. A probabilidade de que um homem vença é o dobro da probabilidade de que uma mulher vença.

a) Determine a probabilidade de que uma mulher vença.
b) Se um homem e uma mulher sao casados qual a probabilidade de que um deles vença?

476 Determine a probabilidade de cada evento:

a) Um número par no lançamento de um dado
b) Pelo menos uma coroa ocorrer no lançamento de três moedas não viciadas
c) Uma bola branca aparecer ao se retirar um única bola de uma urna contendo 4 bolas brancas, 3 vermelhas e 5 azuis.

477 Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 2 pretas e 2 brancas. Outra urna contém 2 bolas vermelhas, 1 preta e 3 brancas. Extrai-se ao acaso uma bola de cada urna. Qual é a probabilidade de que ambas sejam pretas ou ambas não sejam pretas?

478 Duas urnas possuem respectivamente: 2 bolas brancas e 1 azul, uma branca e 3 azuis. Retirando-seuma bola de cada urna, qual a probabilidade de sair uma branca e uma azul?

479 Uma urna contém 7 bolas idênticas, numeradas de 1 a 7. Retirando-se 7 bolas de uma vez qual a probabilidade de sairem:

a) em ordem crescente?
b) em ordem decrescente?

480 Seja um dado viciado de modo que a probabilidade de aparecer um número como resultado seja proporcional ao número dado. Pede-se:

a) Determine a probabilidade de cada resultado
b) Determine a probabilidade de que um número par ou primo ocorra.

481 De uma urna contendo 12 bolas brancas e 8 bolas pretas são retiradas 2 bolas. Qual a probabilidade de que as duas bolas sejam pretas?

482 Uma urna contém 7 bolas brancas e 5 pretas, ache a probabilidade de que:

a) uma bola retirada, ao acaso, seja preta
b) duas bolas retiradas sejam pretas

483 Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de se obter cara é três vezes maior do que a de aparecer coroa. Qual a probabilidade de se obter coroa?

484 Sorteia-se um bilhete entre bilhetes numerados de 1 a 1000. Qual a probabilidade do número sorteado:

a) ser múltiplo de 5?
b) ser múltiplo de 3?
c) ser par?
d) ser múltiplo de 3 ou de 5 ou de 2?

485 Escolhe-se um número, aleatoriamente, entre os números 1 e 1.000.000 (inclusive). Qual a probabilidade do número escolhido não ser quadrado perfeito, nem cubos perfeitos e nem potências quartas perfeitas?

486 Consideremos o número $m = 2^3 . 3^2 . 5$ escolhemos aleatoriamente 1 número inteiro positivo menor ou igual a m. Qual a probabilidade do número escolhido ser primo com m?

487 Dois bilhetes são sorteados de uma urna contendo 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Determine a probabilidade de que a soma dos números sorteados seja par, em cada caso:

a) os bilhetes são retirados sucessivamente sem reposição.
b) os bilhtes são retirados de uma só vez.
c) os bilhetes são retirados sucessivamente com reposição.

488 Joga-se um dado 5 vezes. Qual a probabilidade de obtermos soma dos resultados igual a 18?

489 Uma urna A possui 5 porcas distintas, e uma urna B possui 6 parafusos dos quais 5 encaixam, cada um, em uma das 5 porcas da urna A e um não corresponde a nenhuma das porcas.
Retira-se uma porca de A e um parafuso de B. Qual a probabilidade de que a porca escolhida encaixe no parafuso escolhido?

490 Um dado confeccionado na forma de um icosaedro regular, possui faces numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de que lançado 3 vezes, a soma dos resultados seja maior que 10.

491 Em uma urna tem 8 pares (2, 2), (3, 3), ... de cartas onde em cada par uma carta é preta e a outra é vermelha.

a) Se duas cartas são retiradas aleatoriamente qual a probabilidade de que seja um dos pares? Qual é a probabilidade que seja uma de cada cor?
b) Escolhendo 6 cartas aleatoriamente, determine a probabilidade de que 3 pares sejam escolhidos, de que nenhum par seja escolhido, de que exatamente um par seja escolhido e de que exatamente dois pares sejam escolhidos.

492 Escolhe-se um número ao acaso entre 1 e 300. Determine a probabilidade:

a) do número ser divisível por 4, sabendo-se que termina em 4.
b) do número terminar em 5 sabendo-se que tal número é ímpar.
c) do número ser 50, sabendo-se que está entre 35 e 60 (inclusive).
d) do número ser 25, sabendo-se que é menor que 40.

493 Uma urna possui 5 bolas brancas e 8 amarelas. Retira-se duas bolas da urna, uma de cada vez, sem reposição da bola retirada. Sabendo-se que a primeira bola retirada foi branca, qual a probabilidade da segunda ser amarela?

494 Quatro pessoas A, B, C e D recebem cada uma 13 cartas de um baralho de 52 cartas. Se a pessoa B tem exatamente um rei, qual a probabilidade da pessoa C ter os outros reis?

495 Duas caixas A e B são tais que, A possui 8 objetos dos quais 3 são defeituosos e a caixa B contém 5 dos quais 2 são defeituosos.
Um objeto é retirado aleatoriamente de cada caixa. Se um deles é defeituoso e o outro não, qual a probabilidade do defeituoso ter vindo da caixa A?

496 Numa cidade 25% das pessoas freqüentam um club A, 15% freqüentam um clube B e 10% freqüentam A e B. Escolhe-se uma pessoa aleatoriamente. Pergunta-se:

a) se a pessoa escolhida freqüenta o clube B, qual a probabilidade de freqüentar A?
b) se a pessoa freqüenta o clube A, qual a probabilidade de freqüentar B?

497 Jogam-se 4 moedas. Qual a probabilidade de obtermos pelo menos três "coroas" sabendo-se que na primeira vez obtivemos cara?

498 Um dado "viciado" é tal que a probabilidade de ocorrer um dos resultados é inversamente proporcional ao mesmo. Lançando-se tal dado uma vez, qual a probabilidade de obtermos resultado 4, sabendo-se que tal resultado é par?

499 Numa cidade 40% da população possui cabelos castanhos, 25% olhos castanhos e 15% olhos e cabelos castanhos.
Seleciona-se uma pessoa ao acaso, se esta pessoa tem olhos castanhos, qual a probabilidade de não ter cabélos castanhos?

500 Retira-se de um baralho de 52 cartas, 5 cartas (todas de uma só vez). Sabendo-se que todas são vermelhas, qual a probabilidade de serem do mesmo naipe (copas ou ouros)?

501 Uma urna possui bolas numeradas de 1 a 100. Retira-se uma bola aleatoriamente. Sabendo-se que o número da bola sorteada é par, qual a probabilidade de ser múltiplo de 5?

502 Joga-se um dado 3 vezes. Sabendo-se que a soma.dos resultados é 7, qual a probabilidade de ter ocorrido primeiro resultado igual a 2?

503 Colocam-se 5 livros ao acaso em uma estante (livros: A, B, C, D e E). Pergunta-se:

a) Se os livros A e B iniciam a ordem de colocação, qual a probabilidade do livro C ser o último colocado?

b) Se A, C e D iniciam a ordem de colocação qual a probabilidade de E ser o penúltimo?

504 Formam-se os anagramas da palavra VESTIBULAR. Escolhe-se um anagrama aleatoriamente. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade do anagrama escolhido começar por vogal e terminar por consoante?

b) Sabendo-se que o anagrama escolhido começa por vogal e termina por consoante, qual a probabilidade de aparecer neste anagrama as letras T, I, B e V juntas nesta ordem?

505 Um operário cuida de 2 teares, devendo intervir emendando o fio toda vez que o mesmo se rompe. A probabilidade de não haver interrupção nos teares é de 90% e de 87%, respectivamente, num período de uma hora. Qual a probabilidade de que o operário necessite fazer emendas de fio, em qualquer dos teares, em uma hora?

506 Um time de futebol vence com probabilidade 0,30, perde com probabilidade 0,50 e empata com probabilidade 0,2. Se tal time joga duas vezes, qual a probabilidade de vencer pelo menos uma vez?

507 Uma urna possui 2 bolas pretas e 4 verdes, outra possui 1 preta e 3 verdes. Passa-se uma da primeira para a segunda, e retiramos uma bola dessa segunda urna. Qual a probabilidade de que esta seja verde?

508 Com as urnas do problema anterior, se uma delas é escolhida ao acaso e uma bola é retirada dela, qual é a probabilidade de que esta seja preta?

509 Num grupo de pessoas 10 são adultas e 10 são crianças. Seleciona-se ao acaso uma pessoa de cada vez. Qual a probabilidade das adultas e das crianças se alternarem?

510 Lança-se um dado, se obtermos resultado par, selecionamos uma bola de uma urna A que possui 8 bolas pretas e 3 vermelhas. Caso contrário, selecionamos uma bola de uma urna B que possui 5 bolas pretas e 4 vermelhas. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade da bola selecionada ser preta?

b) Dado que a bola selecionada é preta, qual a probabilidade de ter vindo da urna A?

511 Uma urna possui 3 moedas, 2 não viciadas, uma com duas caras. Seleciona-se uma moeda ao acaso e joga-se esta moeda duas vezes. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de obtermos cara duas vezes?

b) Qual a probabilidade de obtermos cara na segunda vez?

c) Dado que obtivemos duas vezes, qual a probabilidade de ter sido a moeda de duas caras?

512 Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 8 brancas. Uma bola é retirada da urna e uma da outra cor é então colocada na urna. Uma segunda bola é retirada da urna. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade da 2ª bola retirada ser branca?

b) Se as duas bolas retiradas são da mesma cor, qual a probabilidade de serem brancas?

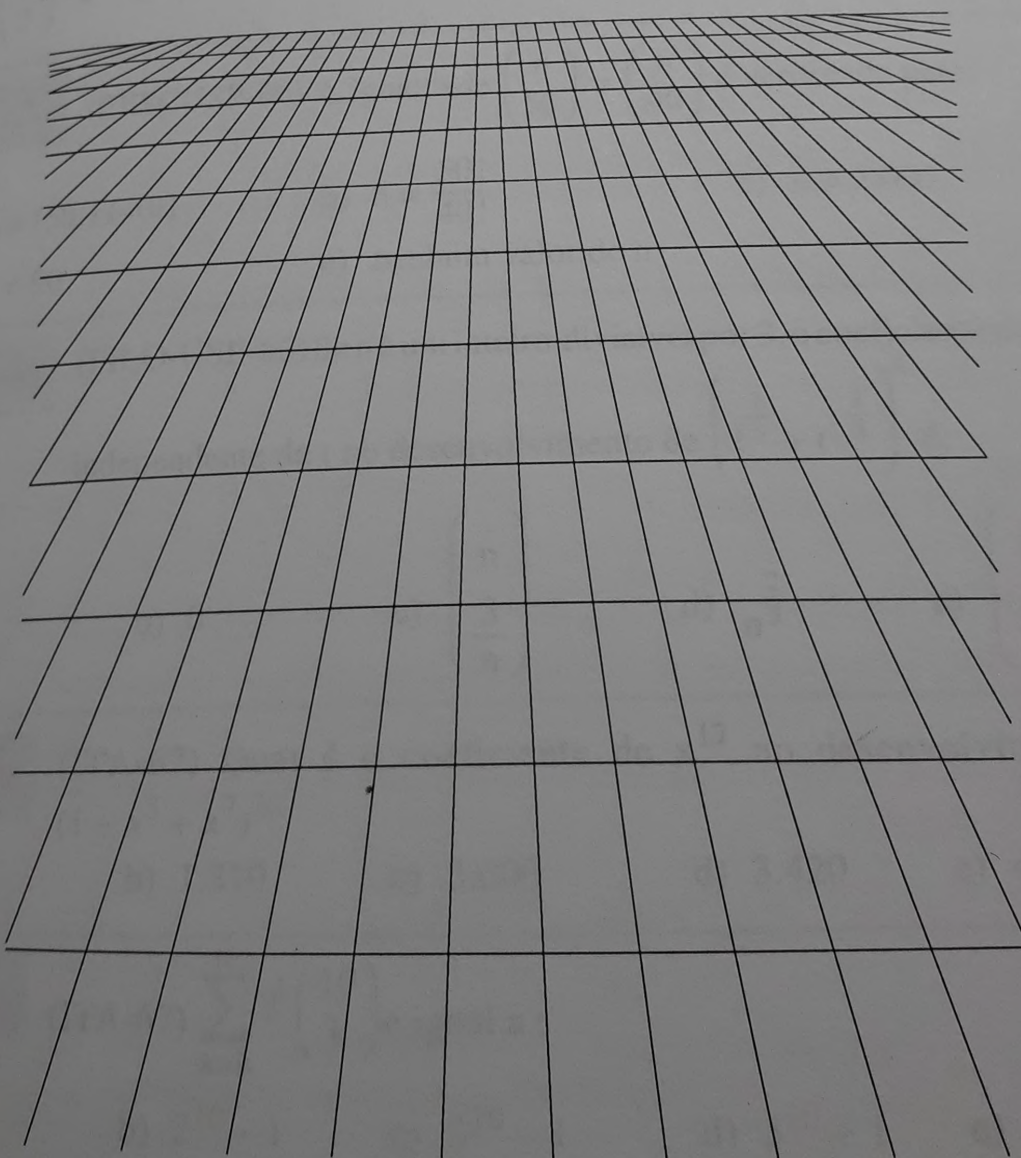
Testes e Questões de Vestibulares

A – Testes

Fatorial, Números Binomiais, Binômio de Newton

V.1 (FEIUC-65) Se $\binom{10}{p} = \binom{10}{q}$, com $p \leq 10$ e $q \leq 10$

a) $p = q$
b) $p = q = 5$
c) $p + q = 10$
d) $p + q = 10$ ou $p = q$
e) nenhuma das respostas anteriores

V.2 (FEIUC-65) No desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{1}{x}\right)^m$, o produto do terceiro pelo ante-penúltimo termos vale:

a) $\binom{m}{2} \cdot \left(m^m - 2\right)$
b) $\binom{m}{2} \cdot x$
c) $\binom{m}{m-2} \cdot x^2$
d) $\binom{m}{3} \cdot x^2$
e) nenhuma das respostas anteriores

V.3 (EESCUSP-66) A igualdade $\binom{n}{50} = \binom{n}{40}$ é verificada para:

a) $n = (50!)\,(40!)$
b) $n = \frac{50\,!}{40\,!}$
c) $n = 2.000$
d) $n = 90$
e) nenhum valor de n

V.4 (FILO-USP-66) Se n é um inteiro divisível por 3, o coeficiente do termo independente de t no desenvolvimento de $\left(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{2}{3}}\right)^n$ é:

a) $\frac{n}{3}$
b) 0
c) $\binom{n}{\frac{3}{n}}$
d) $n^{\frac{2}{3}}$
e) $\binom{n}{\frac{n}{3}}$

V.5 (ITA-67) Qual é o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de $(1 + x^5 + x^7)^{20}$

a) 0
b) 1.210
c) 3.000
d) 3.420
e) 4.000

V.6 (ITA-67) $\sum_{k=0}^{10} 2^k \binom{10}{k}$ é igual a :

a) 2^{10}
b) $2^{10} - 1$
c) $3^{10} - 1$
d) $3^{10} + 1$
e) 3^{10}

V.7 (UNICAMP-67) O desenvolvimento de $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^n$ tem um têrmo independente de x:

a) se n é par
b) se n é ímpar
c) se n é divisível por três
d) qualquer que seja $n \neq 0$
e) não existe nenhum valor de n nestas condições

V.8 (CESCEA-67) O somatório $\sum_{k=0}^{10}\binom{11}{k}$ é igual a:

a) 34.572 b) 34.571 c) 2.048 d) 2.047 e) nada disso

V.9 (CESCEA-67) O valor numérico do polinômio:

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \text{ quando } x = \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}} \text{ e } y = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}$$

é igual a:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2^4}{5}$ d) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{2-\sqrt{6}}{5}$

V.10 (CESCEM-67) O desenvolvimento de $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^n$ tem um termo independente de x:

a) se n é par
b) se n é ímpar
c) se n é divisível por 3
d) qualquer que seja n diferente de zero
e) não existe nenhum valor de n nestas condições

V.11 (FEI-67)Sendo $S=\binom{20}{0}+\binom{20}{1}2+\binom{20}{2}2^2+\ldots+\binom{20}{19}2^{19}+\binom{20}{20}2^{20}$ tem-se:

a) $S = 2^{40}$
b) $S = 9^{10}$
c) $S = 20^{20}$
d) $S = 20!$
e) nenhuma das anteriores

V.12 (E E LINS-67) Na análise combinatória, a relação sempre válida para $m \geq p$ é:

a) $\binom{m}{p}=\binom{m-p}{p}$
b) $\binom{m}{p}=\binom{m}{p-1}+\binom{m-1}{p}$
c) $\binom{m}{p}=\binom{m}{m-p}$
d) $A_{m,p} = p!\binom{m}{p-1}$
e) nenhuma das respostas anteriores

V.13 (E E LINS-67) No desenvolvimento de $(a + x)^m$ o coeficiente do 4º termo é igual ao coeficiente do 9º termo. O valor de m é:

a) 11
b) 13
c) 14
d) 15
e) nenhuma das respostas anteriores

V.14 (EPUSP-68) Seja $A_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(2^p 3^{n-p} - 4^p\right)$. Então para todo $n > 0$ tem-se:

a) $A_n = 0$
b) $A_n = 2^n 3^n - 4^n$
c) $A_n = n$
d) $A_n = \binom{n}{2}\binom{n}{3} - \binom{n}{4}$
e) Nenhuma das anteriores

V.15 (ITA-68) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. A expressão $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$ é igual a :

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 4 \sum_{j=1}^{n} a_j$
b) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j a_j \right)$
c) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \binom{n}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j$
d) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \right)$
e) nenhuma das respostas anteriores

V.16 (ITA-68) Sejam a e b dois números reais quaisquer e p um número primo. A igualdade $(a \pm b)^p = a^p \pm b^p$ é verificada se:

a) $a = b = 1$
b) a e b são primos entre si
c) b = P.A.
d) $x.p = 0$ para todo número real x
e) nenhuma das respostas acima

V.17 (EESCUSP-68) Indiquemos com $\binom{m}{p}$ o número das combinações simples de m elementos p a p. O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ é:

a) $\binom{12}{3}$
b) $\binom{12}{4}$
c) $\binom{12}{5}$
d) $\binom{12}{6}$
e) nenhuma das respostas anteriores

V.18 (EELINS-68) O quarto termo do desenvolvimento de $\left(x+\sqrt{y}\right)^6$ pela fórmula de Newton é:

a) $6x\sqrt[3]{y}$ b) $15x^4y$ c) $20x^3y\sqrt{y}$
d) $6x^6y^3$ e) nenhuma das respostas anteriores

V.19 (EELINS-68) Sendo $\binom{m-1}{m-p}=10$ e $\binom{m}{m-p}=55$, então o valor de $\binom{m-1}{p}$ é:

a) 45 b) 65 c) 40 d) nenhuma das anteriores

V.20 (FILO-PUC-68) $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ é igual a:

a) n^p b) p^n c) 2^n
d) n x p e) nenhuma das respostas anteriores

V.21 (FILO-PUC-68) $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p$ é igual a:

a) $np(-1)$ b) n^2p^2 c) zero
d) um e) nenhuma das respostas anteriores

V.22 (ITA-69) A soma $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}$ é igual a:

a) $n\cdot 2^{n-1}$ b) 2^n c) $n\cdot 2^n$ d) $(n+1)2^{n+1}$ e) $n\cdot 2^{n+1}$

V.23 (FFCLUSP-69) Qual o valor do termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$:

a) – 20 b) 8 c) 20 d) 40 e) – 40

V.24 (CESCEA-69) Se m é um número inteiro não negativo, o valor da expressão $[(m+2)!-(m+1)!]m!$ é:

a) m! b) $(m!)^2$ c) 1 d) $(m+1)!$ e) $[(m+1)!]^2$

V.25 (CESCEA-69) Simplificando-se $\left(1-\sqrt{5}\right)^5 - \left(1+\sqrt{5}\right)^5$ obtém-se:

a) 160 b) $-160\sqrt{5}$ c) $160\sqrt{5}$ d) $-50\sqrt{5}$ e) $-360\sqrt{5}$

V.26 Sabendo-se que a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^p$ é igual a 512, p vale:

a) 8 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

V.27 (GV-71) Sendo m, p e q números inteiros positivos com $q < p$ e $\binom{m}{p+q} = \binom{m}{p-q}$ então:

a) $m = p + q$ b) $m = 2(p+q)$ c) $m = 2p$
d) $p = 2q$ e) $m! = p! + q!$

V.28 (CESCEM-72) Assinale a resposta certa:

a) $(x+1)^{100} = x^{99} + x^{98} + \ldots + x^2 + x + 1$
b) $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
c) $\left(x^2-1\right)^4 = x^8 - 1$
d) $\left(x^3-1\right)(x-1)$ é divisível por $(x+1)$
e) $\left(x^3-1\right)\left(x^{11}-1\right) = \left(x^{33}-1\right)$

V.29 (CESCEA-72) O valor numérico da expressão:

$x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + y^n$ para $x = y = 1$ é:

a) 2^{n-1} b) 2^n c) 2^{n+1} d) 2^{2n} e) não sei

V.30 (GV-72) A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar de $(x-y)^n$ é 256. Então o valor de n é:

a) 9 b) 8 c) 7
d) 4 e) nenhuma das alternativas anteriores

V.31 (GV-72) Assinale a afirmação falsa

a) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$, quaisquer que sejam os naturais n e p, com $n \geq p$
b) $(n+5)! - n! = 5!$, para todo natural n

c) $\dfrac{(n+1)!}{(n+3)!} = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$, para todo natural n

d) $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$, quaisquer que sejam os naturais n e p, com $n \geq p$

e) $n!(n+1) = (n+1)!$, para todo natural n

V.32 (ITA-73) O coeficiente de $a^{n+1-p}b^p$ no produto de

$a^k + \dbinom{k}{1}a^{k-1}b + \ldots + \dbinom{k}{p}a^{k-p}b^p + \ldots + b^k$ por $(a+b)$ se $k = n$, vale:

a) $\dbinom{n}{p}$

b) $\dbinom{n+1}{p}$

c) $\dbinom{n-1}{p}$

d) $\dbinom{n+1}{p+1}$

e) nenhuma das anteriores

V.33 (ITA-73) Sejam $n \in \mathbf{N}^+$, $p \in \mathbf{N}$ onde $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Então $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p-n}(-1)^{p}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$ vale:

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) nenhuma das respostas anteriores

V.34 (CESCEM-73) Utilizando-se a fórmula do binômio de Newton determinam-se as soluções da equação trigonométrica:

$\text{sen}^4 x - 4 \cdot \text{sen}^3 x + 6 \cdot \text{sen}^2 x - 4 \cdot \text{sen } x + 1 = 0$ Assinale a assertiva correta:

a) $x = (2k+1)\pi, k \in Z$

b) $x = k\pi; k \in Z$

c) $x = \dfrac{k\pi}{2}; k \in Z$

d) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

e) não existe x real que satisfaça a equação

V.35 (GV-73) Os coeficientes do 5º,6ºe7º termos do desenvolvimento de $(1+x)^n$ estão em progressão aritmética. Então (2n-1) vale, para $n \leq 10$:

a) 13

b) 19

c) 9

d) 7

e) 15

V.36 (GV-73) O valor de $\displaystyle\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}(2)^x(3)^{n-x}$ é:

a) 6^n

b) 5^n

c) 1

d) 2^n

e) impossível de se calcular por vias elementares

V.37 (GV-73) A expressão $\dfrac{(k!)^3}{\{(k-1)!\}^2}$ é igual a:

a) k^3
b) $k^3(k-1)!$
c) $\{(k-1)!\}^2$
d) $(k!)^2$
e) $k^3\{(k-1)\}^2$

V.38 (GV-73) Uma das afirmações abaixo é falsa. Assinale-a:
Obs: Considere n natural e $n \geq 1$

a) $n! - (n-1)! = (n-1)! \cdot (n-1)$
b) $2(n!) - (n-1) \cdot (n-1) = (n-1)! - n!$
c) $(n!)^2 = [(n+1)! - n!] \cdot (n-1)!$
d) $(2n+1)! = (2n-1)!(4n^2+2n)$
e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$

V.39 (ITA-74) A condição para que $\dbinom{n}{k}$ seja o dobro de $\dbinom{n}{k-1}$ é que:

a) $n+1$ seja múltiplo de 3
b) n seja divisível por 3
c) $n-1$ seja par
d) $n = 2k$
e) nenhuma das respostas anteriores

V.40 (CESCEM-74) A soma:
$S = (x^3-1)^4 + 4(x^3-1)^3 + 6(x^3-1)^2 + 4(x^3-1) + 1$é igual a:

a) x^{12}
b) $x^{12} - 4x^9 + 6x^6 - 4x^3 + 1$
c) $x^{12} + 4x^9 + 6x^6 + 4x^3$
d) $x^{12} + 1$
e) $x^{12} + x^6 + 1$

V.41 (CESCEM-74) $(p+q)^n = \sum_{i=o}^{n} \dbinom{n}{i} p^i q^{n-i}$, $n > 0$. Se $p > 0$, $q > 0$ e $p + q = 1$, podemos concluir que o valor de $\dbinom{n}{i} p^i q^{n-i}$

a) só é menor do que 1 para $i < \dfrac{n}{2}$
b) só é maior do que 1 para $i > \dfrac{n}{2}$
c) só é menor do que 1 para $i > \dfrac{n}{2}$
d) só é maior do que 1 para $i < \dfrac{n}{2}$
e) é sempre menor do que 1

V.42 (CESCEM-74) O coeficiente do termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{517}$ é:

a) $\binom{517}{259}$ b) $\binom{517}{258}$ c) $-\binom{517}{259}$ d) 0 e) 1

V.43 (CESCEA-74) Quando você desenvolve $(5x + 2y)^5$ pelo binômio de Newton aparecem coeficientes numéricos e potenciais de x e y. A soma dos coeficientes numéricos é:

a) 15.821 b) 16.890 c) 16.807 d) 13.805 e) não sei

V.44 (GV-74) No desenvolvimento de $(x^3 + y^2)^{10}$, o coeficiente do termo médio é:

a) 630 b) 120 c) 252
d) 210 e) nenhuma das anteriores

V.45 (GV-74) $n^2 \cdot (n-2)!\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ vale, para $n \geq 2$:

a) n! b) (n + 1)! c) (n – 1)!
d) (n + 1)!(n – 1)! e) nenhuma das respostas anteriores

V.46 (CESCEA-75) Sabendo que

$$a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5 = 1.024$$ pode-se dizer que $(a+b)^2$ é igual a:

a) 144 b) 4 c) 36 d) 64 e) 16

V.47 (CESCEA-75) Se $\frac{A_{n-1,3}}{A_{n,3}} = \frac{3}{4}$, então n é igual a:

a) 11 b) 13 c) 4 d) 5 e) 12

V.48 (GV-75) Sabendo-se que m.m! = (m + 1)!-m!, pode-se concluir que 1.1! + 2.2! + ... + m.m! é igual a:

a) (m + 1)! b) (m + 1)! –1 c) (2m)! –m! d) (m – 1)! e) m! + 1

V.49 (GV-75) A expressão $99^5 + 5(99)^4 + 10(99)^3 + 5(99) + 1$ é igual a:

a) 99^6 b) 10^9 c) 99^{10} d) 10^{10} e) 99^9

V.50 (GV-75) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento binomial de $\left(1 - \frac{2}{3}x\right)^6$ é:

a) $-\frac{8}{9}$ b) $-\frac{64}{81}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{8}{64}$ e) $\frac{32}{41}$

V.51 (CESCEA-76) Sabendo-se que o quarto termo do desenvolvimento de $(2x - 3y)^n$ é $-1080x^2y^3$, então o 3º termo desse desenvolvimento é:

a) $420x^3y^2$ b) $360x^3y^2$ c) $540x^3y^2$ d) $720x^3y^2$ e) $120x^3y^2$

V.52 (CESCEM-77) Um conjunto A possui n elementos, sendo $n \geq 4$. O número de subconjuntos de A com 4 elementos é:

a) $\frac{n!}{24(n-4)!}$ b) $\frac{n!}{(n-4)!}$ c) $(n-4)!$ d) $n!$ e) $4!$

V.53 (CESCEA-77) O coeficiente numérico do termo de 4º grau de desenvolvimento do binômio de Newton $(x-2)^7$ é:

a) $-\frac{7!}{4!3!}$ b) $-\frac{8!}{4!3!}$ c) $\frac{8!}{4!3!}$ d) $\frac{7!}{4!3!}$ e) $\frac{2!}{3!}$

V.54 (SANTA CASA-77) No desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{2}{5x}\right)^8$ o termo independente de x é o:

a) 4º b) 5º c) 6º d) 7º e) 8º

V.55 (GV-77) No desenvolvimento binomial de $\left(\frac{1}{2}x^2 - y\right)^{10}$, o coeficiente do termo que contém o fator y^4 é:

a) $\frac{105}{64}$ b) $\frac{105}{32}$ c) 210 d) $\frac{210}{32}$ e) $\frac{105}{124}$

V.56 (GV-77) Seja **N** o conjunto dos números inteiros positivos. O conjunto de todos os $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$ e para os quais $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}$ é o conjunto:

a) $\{3\}$ b) $\{3, 5\}$ c) $\{3, 4\}$

d) $\{n \in \mathbf{N} \mid n > 3\}$ e) $\{3, 4, 5\}$

V.57 (FGV-2ºSEMESTRE-78) No desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$, o termo de grau 1 em x tem coeficiente numérico:

a) 2016 b) 1006 c) 504 d) 252 e) 126

V.58 (FGV-1ºSEMESTRE-79) No desenvolvimento do binômio $(a + b)^{n + 5}$, ordenado segundo as potências decrescentes de a, o quociente entre o termo que ocupa a (n + 3) - ésima posição por aquele que ocupa a (n + 1) - ésima é $\frac{2b^2}{3a^2}$, isto é, $\frac{T_{n+3}}{T_{n+1}} = \frac{2b^2}{3a^2}$. Então o valor de n é:

a) 0 b) 9 c) 4 d) 5 e) 6

V.59 (FGV-1ºSEMESTRE-79) O valor de a, para o qual um dos termos do desenvolvimento de $(x + a)^5$ é $270x^2$ pertence ao conjunto:

a) $\left\{\frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}\right\}$ b) $\left\{3, \sqrt[3]{9}, \frac{3}{2}\right\}$ c) $\left\{\sqrt{5}, \sqrt[3]{6}, 2\right\}$

d) $\left\{4, \frac{1}{5}, \sqrt[3]{12}\right\}$ e) $\left\{\frac{1}{4}, 5, \sqrt{6}\right\}$

V.60 (UFSCAR-79) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{15}$ é:

a) 1 b) – 3.003 c) – 30 d) 1.225 e) – 425

V.61 (CESGRANRIO-79) O coeficiente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{21}$ é:

a) $\frac{21}{2^{20}}$ b) $\frac{201}{21}$ c) $\frac{1}{2^{10}}$ d) 21 e) $\frac{1}{2}$

V.62 (MACK-79) No desenvolvimento de $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{4}\right)^n$ a diferença entre os coeficientes binominais do terceiro e do segundo termos é 44. Então:

a) n = 7 b) n = 8 c) n = 9 d) n = 10 e) n = 11

V.63 (MACK-79) No desenvolvimento de $(3 + 6x^2)^{11}$, o termo independente de x é:

a) o primeiro b) o segundo c) o décimo

d) décimo primeiro e) inexistente

V.64 (MACK-79) Se $\binom{n}{2} = 28$, então n é:

a) 7 b) 8 c) 14 d) 26 e) 56

V.65 (PUC-79) $(2x - y)^4 = a_1x^4 + a_2x^3y + a_3x^2y^2 + a_4xy^3 + a_5y^4$, então $\sum_{i=1}^{5} a_i$, é igual a:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 4 e) 5

V.66 (PUC-79) O termo no desenvolvimento de $(2x^2 - y^3)^8$, que contém x^{10}, é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

V.67 (SANTA CASA-80) A soma dos coeficientes do primeiro, segundo e terceiro termos do desenvolvimento de $(x^2 + x^{-1})^m$ é igual a 46. O termo independente de x vale:

a) 36 b) 126 c) 84 d) 168 e) n.d.a.

V.68 (FGV-80) No desenvolvimento de $\left(x + \frac{k}{x}\right)^{10}$, para que o coeficiente do termo em x^4 seja 15, k deve ser igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{3}$ d) 3 e) 4

V.69 (FGV-80) Sabendo que $\binom{m}{p} = x$ e $\binom{m+1}{p+1} = y$, então $\binom{m}{p+1}$ é igual a:

.a) $x + y$ b) $x - y$ c) $y - x$ d) $x - p$ e) $y - p$

V.70 (ITAJUBÁ-MG-80) Sendo $A = \begin{vmatrix} m! & -7 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{(m+a)!} \end{vmatrix}$ calcular m tal que $A = 2$.

V.71 (CESGRANRIO-80) O coeficiente de x^4 no polinômio $P(x) = (x + 2)^6$ é:

a) 64 b) 60 c) 12 d) 4 e) 24

V.72 (SANTA CASA-81) Se $\log_n \binom{n+3}{2} = 2$, então n é tal que:

a) a característica de seu logaritmo, na base 10, é 1.
b) a mantissa de seu logaritmo, na base 10, é 0.
c) $\text{antilog}_3\, n = 1$ d) $\text{colog}_2\, n = -1$ e) $(\log n) \cdot (\log_6 10) = 1$

V.73 (SANTA CASA-81) Se a soma dos coeficientes obtidos no desenvolvimento do binômio $(3x^2-y)^n$, onde $n \in N^*$, é igual a 64, então n é um número:

a) primo
b) múltiplo de 2
c) divisível por 5
d) cubo perfeito
e) quadrado perfeito

V.74 (SANTA CASA-84) A solução da equação $\frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} = 4$ é um número natural:

a) par
b) cubo perfeito
c) maior que 10
d) divisível por 5
e) múltiplo de 3

V.75 (FGV-84) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^6$ é:

a) 15625
b) 7776
c) 6225
d) 4225
e) 2048

V.76 (CESGRANRIO-84) Se $a_n = \frac{n!(n^2-1)}{(n+1)!}$, então a_{1984} é igual a:

a) $\frac{1}{1985}$
b) 1984
c) 1983
d) $\frac{1985}{1984^2 - 1}$
e) $\frac{1984^2 - 1}{1984}$

V.77 (VUNESP-85) A soma $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$ é igual a:

a) $n.2^{n-1}$
b) 2^n
c) $n.2^n$
d) $(n + 1).2^{n+1}$
e) $n.2^{n+1}$

V.78 (FATEC-87) Seja n um número natural maior que 2. No desenvolvimento do binômio $\left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^3}\right)^n$, segundo as potências de x, a diferença entre os coeficientes do 3º e 2º termos é 27. O termo independente de x é o:

a) terceiro
b) quarto
c) quinto
d) sexto
e) sétimo

V.79 (CESGRANRIO-88) A soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de $(x - 2)^8$ vale:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 1
e) 2

V.80 (ITA-89) Escreva o desenvolvimento do binômio $(tg^3x\text{-}cosec^6x)^m$, onde m é um número inteiro maior que zero, em termos de potências inteiras de sen x e cos x. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela P, que não conterá a função sen x. Seja m o menor valor para o qual isto ocorre. Então $P = \frac{-64}{9}$ quando x for igual a:

a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, k inteiro
b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro
c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k inteiro
d) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, k inteiro
e) não existe x satisfazendo a igualdade desejada

V.81 (ITA-90) Sejam os números reais α e x onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$.

Se, no desenvolvimento de $\left((\cos\alpha)x + (\text{sen}\alpha)\frac{1}{x}\right)^8$ o termo independente de x vale $\frac{35}{8}$, então o valor de α é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) n.d.a.

V.82 (GV-90) A equação $\binom{x^2+3}{x+3} - \binom{x^2+2}{x^2+1} = 1$ tem por raiz:

a) um número par positivo
b) um número primo
c) um número negativo
d) um número múltiplo de 3
e) um número irracional

V.83 (FEI-90) Se $\binom{49}{5} = m$, $\binom{49}{4} = n$ e $\binom{50}{45} = p$, então:

a) $p = \frac{m}{n}$
b) $p = mn$
c) $p = m + n$
d) $p = m - n$
e) $p = \frac{m+n}{2}$

V.84 (ITA-91) Sejam $A = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 3^k$ e $B = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} 11^k$.

Se $\ell_n B - \ell_n A = \frac{6561}{4}$, então n é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) n.d.a.

Notações: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ denota a combinação de n elementos tomados k a k e $\ell_n x$ denota o logaritmo neperiano de x.

V.85 (ITA-92) No desenvolvimento de $(x + y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, a soma do 2º termo com $\frac{1}{10}$ do termo de maior coeficiente é igual a 8 vezes a soma de todos os coeficientes.

Se $x = (2)^{z+1}$ e $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{z-\frac{1}{2}}$, então:

a) $z \in [0,1]$ b) $z \in (20,50)$ c) $z \in (-\infty,0]$ d) $z \in [1,15]$ e) n.d.a.

V.86 (ITA-92) A igualdade $\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n + \sum_{j=o}^{n}\binom{m}{j}2^m = 64$ é válida para:

a) quaisquer que sejam n e m naturais positivos
b) qualquer que seja n natural positivo e m = 3
c) n = 13 e m = 6 d) n é ímpar e m par e) n.d.a.

V.87 (FEI-92) No desenvolvimento de $(1 + 2x^2)^6$, o coeficiente de x^8 é:

a) 60 b) 120 c) 240 d) 480 e) 960

V.88 (MAUÁ-92) No desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, achar o termo independente de x.

V.89 (MACK-92) O termo independente de x em

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 20 b) −15 c) −20 d) 15 e) 200

V.90 (ITA-94) No desenvolvimento de $A = \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3}\right)^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a $\frac{9}{16}$.

Se a e m são números reais positivos tais que $A = (m^2 + 4)^5$, então:

a) $am = \frac{2}{3}$ b) $am = \frac{1}{3}$ c) $a + m = \frac{5}{2}$

d) $a + m = 5$ e) $a - m = \frac{5}{2}$

V.91 (ESPM-94) Resolver em N a equação: $(n!)^2 - 5n! + 6 = 0$

a) $n = 0$ b) $n = 1$ c) $n = 2$ d) $n = 3$ e) $n = 4$

V.92 (ESPM-94) Sabendo que $(x + 2)! = 120$ e $x \geq 2$, ache o valor de x

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

V.93 (FEI-94) A soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(14x - 13y)^{237}$ é:

a) 0 b) 1 c) −1 d) 331.237 e) 1.973.747

Análise Combinatória

V.94 (ITA-65) O número de todas as diagonais de um octógono é dado pela fórmula:

a) $C_n^2 - n,\ n = 8$ b) $C_{n+1}^2 - n,\ n = 8$ c) $2n - \frac{n}{2},\ n = 8$
d)
e) nenhuma das respostas anteriores

V.95 (UNICAMP-67) Quantas permutações distintas podem ser formadas com as letras da palavra CARCARÁ? (não considere o acento).

a) 840 b) 420 c) 210
d) 2520 e) nenhuma das respostas anteriores

V.96 (EESCUSP-67) Seja $A_{n,p}$ = número de arranjos de n elementos p a p; seja $C_{n,p}$ = número de combinações de n elementos p a p. Então a fórmula: $A_{n+1,4} = 20.C_{n,2}$ é verdadeira para:

a) $n = 5$ b) $n = 7$ c) $n = 4$ d) $n = 36$ e) $n = 17$

V.97 (FILO-USP-67) Se de um grupo de 60 rapazes vão ser escolhidas três seleções de onze jogadores cada, a ordem de grandeza do número de modos de escolher é:

a) 10^7 b) 10^{12} c) superior a 10^{18}
d) 10^{15} e) inferior a 10^3

V.98 (CESCEM-67) Um dado especial em forma de icosaedro, tem suas 20 faces numeradas da seguinte forma: duas das faces têm o número zero; as 18 restantes têm os números, −9, −8, −7,.., −1,1,2,..,9. A probabilidade de que, lançando dois destes dados, tenhamos uma soma do número de pontos igual a 2 vale:

a) $\frac{9}{400}$ b) $\frac{18}{400}$ c) $\frac{10}{400}$ d) $\frac{19}{400}$ e) $\frac{2}{20}$

V.99 (CESCEA-67) No jogo de loto, de uma urna contendo 90 pedras numeradas de 1 a 90, quatro pedras são retiradas sucessivamente; o número de extrações possíveis tal que a terceira pedra seja 80 será:

a) $A_{90,4}$ b) P_4 c) P_{80} d) $A_{89,3}$ e) $C_{89,3}$

V.100 (FEI-67) Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras se pode ir do ponto A até a reta BC?

a) 8 b) 64 c) 256
d) 1.024 e) nenhuma das anteriores

V.101 (FILO-USP-68) Uma urna contém bolas brancas, pretas e vermelhas. O número de maneiras distintas de se retirar, com reposição, 6 bolas, 2 de cada uma das 3 cores.

a) não pode ser calculado sem conhecermos a composição da urna
b) é 45 c) é 90 d) é 3.375
e) nenhuma das respostas anteriores

V.102 (IME USP-69) Uma bandeira é formada de 7 listras que devem ser pintadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

a) 128 b) 192 c) 35 d) 2.187 e) n.d.a.

V.103 (ITA-69) Resolvendo a equação $C_{15,x-1} = C_{15,2x+1}$, onde $C_{m,p}$ significa o número de combinações simples (sem repetição) de $\underline{m}$ elementos tomados $\underline{P}$ a $\underline{P}$, obtemos:

a) $x = -2$ e $x = 5$ b) $x = 2$ e $x = -2$ c) $x = 2$ e $x = 5$
d) $x = 2$ e) nenhuma das respostas anteriores

V.104 (CESCEA-69) Uma organização dispõe de 10 economistas e 6 administradores. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas de modo que cada comissão tenha no mínimo 3 administradores?

a) 2.400 b) 675 c) 3.136 d) 60 e) 3.631

V.105 (EESCUSP-69) O número de combinações de n elementos p a p, que contêm k elementos determinados é:

a) C_{p-k}^{n-k} b) C_k^n c) C_{p-k}^n d) C_p^{n-k} e) C_{K-p}^n

V.106 (CESCEM-70) **n** pontos distintos do plano determinam, no máximo:

a) $\frac{n}{3}$ triângulos b) $\frac{n^2}{3}$ triângulos c) $\frac{n!}{3}$ triângulos

d) $\frac{n!}{(n-3)!}$ triângulos e) $\frac{n!}{3!(n-3)!}$ triângulos

V.107 (GV-70) O número de maneiras que podemos atribuir os nomes de Paulo, Antônio e José a 11 meninos, com a condição de que 3 deles se chamem Paulo, 2 Antonio e 6 José é:

a) 3!2!6!11! b) $\frac{3!2!6!}{11!}$ c) $\binom{11}{3}\binom{11}{2}\binom{11}{6}$

d) 4620 e) nenhuma das respostas anteriores

V.108 (ITA-71) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

a) 30 b) 12 c) 36

d) 18 e) nenhuma das respostas anteriores

V.109 (CESCEA-71) Seja a, a ≥ 6, a solução da equação: $A_{n+2,7} = 10080C_{n+1,7}$. Então, sendo $f(x) = x^2 - 3x + 1$, f(a) vale:

a) 109 b) 72 c) 181 d) 190 e) não sei

V.110 (FEI-71) O número de anagramas formados com as letras da palavra república: nas quais as vogais se mantém nas respectivas posições é:

a) 5! b) 5! 4! c) 9! d) 0! e) 4!

V.111 (GV-71) O sistema telefônico de São Paulo utiliza sete (7) dígitos para designar os diversos telefones. Supondo que o primeiro dígito seja sempre dois (2) e que o dígito zero (0) não seja utilizado para designar as estações (2º e 3º dígitos), quantos números de telefones diferentes poderemos ter:

a) 80 000 b) 800 000 c) 810 000

d) 900 000 e) nenhuma das anteriores

V.112 (GV-71) Uma loteria (semelhante à loteria esportiva) apresenta 10 jogos, cada um com 4 possíveis resultados. Usando a aproximação $2^{10} \cong 10^3$, então o número total de resultados possíveis será:

a) menos que 100.000 b) entre 100.000 e 1.000.000

c) entre 1.000.000 e 10.000.000 d) entre 10.000.000 e 100.000.000

e) nenhuma das anteriores

V.113 (GV-71) Em um congresso há 30 professores de matemática e 12 de física. Quantas comissões poderíamos organizar compostas de 3 professores de matemática e 2 de física?

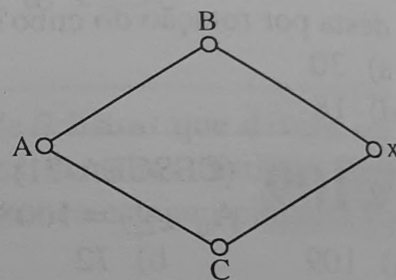
a) 5.359.200 b) 60 c) 267.960 d) 129.600 e) 4.060

V.114 (ITA-72) Sejam A um conjunto finito com m elementos e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. O número de todas as funções definidas em I_n com valores em A é:

a) C_m^n b) $m \cdot n$ c) n^m
d) m^n e) nenhuma das respostas anteriores

V.115 (CESCEA-72) Dez clubes de futebol disputam um campeonato em dois turnos. No final, dois clubes empatam na primeira colocação, havendo mais um jogo de desempate. Quantos jogos foram disputados?

a) 101 b) 91 c) 90 d) 46 e) não sei

V.116 (GV-72) Existem apenas dois modos de se atingir uma cidade x partindo de uma outra A. Uma delas é ir até uma cidade intermediária B e de lá atingir x, e a outra é ir até C e de lá chegar a x. (Veja esquema ao lado). Existem 10 estradas ligando A e B; 12 ligando B à x; 5 ligando A à C; 8 ligando C à x; nenhuma ligação entre B e C e nenhuma ligação direta entre A e x. O número de percursos diferentes que se pode fazer para partindo de A atingir x pela primeira vez é:

a) 35 b) 4.800 c) 300 d) 4 e) 160

V.117 (GV-72) Há 12 pontos A,B,C,... dados num plano α, sendo que 3 desses pontos nunca pertencem a uma mesma reta. O número de triângulos que contém o ponto A como um dos vértices, que podemos formar com os 12 pontos é:

a) 165 b) 220 c) 55
d) 66 e) nenhuma das alternativas

V.118 (CESCEA-73) Suponha que no início de um jogo você tenha R$ 2,00 e que só possa jogar enquanto tiver dinheiro. Supondo que em cada jogada você perde ou ganha R$ 1,00, ao final de três jogadas os possíveis resultados são:

a) R$ 2,00, R$ 3,00 ou R$ 5,00 b) R$ 1,00, R$ 3,00 ou R$ 4,00
c) R$ 0,00, R$ 2,00 ou R$ 4,00 d) R$ 1,00, R$ 3,00 ou R$ 5,00

V.119 (CESCEA-73) Um automóvel é oferecido pelo fabricante em 7 cores diferentes, podendo o comprador optar entre os motores 2.000 cc e 4.000 cc. Sabendo-se que os automóveis são fabricados nas versões *standard*, *luxo* e *super-luxo*, quantas são as alternativas para o comprador?

a) 14 b) 21 c) 42 d) 12

V.120 (GV-73) Sobre uma mesa são colocadas em linha 6 moedas. O número total de modos possíveis pelos quais podemos obter 2 caras e 4 coroas voltadas para cima é:

a) 360 b) 48 c) 30 d) 120 e) 15

V.121 (CESCEA-74) Um estádio tem 10 portões; de quantas maneiras diferentes o estádio estará aberto?

a) 1.200 b) 1.023 c) $C_{10,1}$
d) $C_{10,1} \cdot C_{10,10}$ e) não sei

V.122 (CESCEA-74) De quantas maneiras um técnico de futebol pode formar um quadro de 11 jogadores escolhidos de 22, dos quais 3 são goleiros e onde só o goleiro tem posição fixa?

a) $3 \cdot C_{19,10}$ b) $A_{22,11}$ c) $C_{22,11}$ d) $3 \cdot A_{19,10}$ e) $3 \cdot C_{21,10}$

V.123 (GV-74) 10 alunos devem ser distribuídos em 2 classes, de 7 e 3 lugares respectivamente. De quantas maneirs distintas pode ser feita a distribuição?

a) 720 b) 14.400 c) 120
d) 86.400 e) nenhuma das respostas anteriores

V.124 (GV-74) Deve ser formada uma comissão constituída de 3 estatísticos e 3 economistas, escolhidos entre 7 estatísticos e 6 economistas. De quantas maneiras diferentes poderão ser formadas essas comissões?

a) 700 b) 25.200 c) 330 d) 650 e) 720

V.125 (GV-74) Uma moto tem combustível suficiente para somente três voltas num circuito. Pedro, Manoel e Antônio disputam, através de lançamento de uma moeda,a oportunidade de dar cada volta, do seguinte modo:

(I) o lançamento da moeda é efetuado antes de cada volta;
(II) se coroa, a vez é de Manoel;
(III) se cara, a vez é de Pedro;
(IV) se a mesma face ocorrer consecutivamente, a vez é de Antônio.

Pode-se dizer, então, que Antônio dará:

a) pelo menos uma volta
a) no máximo uma volta
c) pelo menos uma volta, se a primeira for dada por Manoel
d) no máximo duas voltas, se a primeira for dada por Pedro
e) nenhuma das respostas anteriores

V.126 (GV-74) Existem 7 voluntários para exercerem 4 funções distintas. Qualquer um deles está habilitado para exercer qualquer dessas funções. Portanto, pode-se escolher quaisquer 4 dentre os 7 voluntários e atribuir a cada um deles uma das 4 funções. Quantas possibilidades existem para essa atribuição?

a) 20 b) 360 c) 625 d) 840 e) 5.040

V.127 (GV-74) Uma palavra é formada por N vogais e N consoantes. De quantos modos distintos pode-se permutar as letras desta palavra, de modo que não apareçam juntas duas vogais ou duas consosantes?

a) $(N!)^2$ b) $(N!)^2 \cdot 2$ c) $(2N)!$
d) $(2N)! \cdot 2$ e) nenhuma das respostas anteriores

V.128 (MACK-74) Os ingleses têm o costume de dar alguns nomes para as crianças. O número de maneiras diferentes de chamar-se uma criança, se existem 300 nomes diferentes e se uma criança não pode ter mais do que 3 nomes, todos diferentes entre si, é:

a) 10^6 b) 300^2 c) 300^3
d) 26.820.600 e) 6.744.700

V.129 (ITA-75) O número de soluções inteiras e não negativas da equação: $x + y + z + t = 7$ é:

a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{11}{4}$ c) $\binom{10}{3}$
d) $\binom{11}{3}$ e) nenhuma das respostas anteriores

V.130 (CESCEM-75) O Sr. Moreira, dirigindo-se ao trabalho, vai encontrando seus amigos e levando-os juntos no seu carro. Ao todo, leva 5 amigos, dos quais apenas 3 são conhecidos entre si. Feitas as apresentações, os que não se conheciam apertam-se as mãos dois a dois. O número total de apertos de mão é:

a) $C_{5,2} - C_{3,2}$ b) $A_{5,2} - A_{3,2}$ c) $P_5 - P_3$ d) $C_{5,3}$ e) $C_{3,2}$

V.131 (CESCEA-75) Uma pessoa possui um certo número m de objetos distintos. Agrupando-os 3 a 3, de modo que cada grupo difira do outro por possuir pelo menos um objeto diferente, obteve o mesmo número de grupos se os juntasse 5 a 5, do mesmo modo. Então $\binom{m}{3}$ é:

a) 35 b) 84 c) 120 d) 56 e) 10

V.132 (GV-75) Um homem tem oportunidade de jogar no máximo 5 vezes na roleta. Em cada jogada ele ganha ou perde um cruzeiro. Começará com um cruzeiro e parará de jogar antes de cinco vezes, se perder todo seu dinheiro ou se ganhar três cruzeiros, isto é, se tiver quatro cruzeiros. O número de maneiras em que o jogo poderá se desenrolar é:

a) 5 b) 3 c) 11 d) 12 e) 10

V.133 (GV-75) Numa assembléia estão presentes 8 deputados do MDB e 3 da ARENA. Sabendo que o presidente da assembléia é do MDB e não participa de comissões, pergunta-se: quantas comissões de 5 elementos ele poderá formar de modo que pelo menos um elemento seja da ARENA?

a) 231 b) 441 c) 321 d) 123 e) 132

V.134 (GV-75) Um professor conta exatamente 3 piadas no seu curso anual. Ele tem por norma nunca contar num ano as mesmas 3 piadas que ele contou em qualquer outro ano. Qual é o mínimo número de piadas diferentes que ele pode contar em 35 anos?

a) 5 b) 12 c) 7 d) 32 e) 21

V.135 (ITA-76) No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever, de modo que os algarismos 0 (zero), 2 (dois) e 4 (quatro) apareçam agrupados?
Obs: Considerar somente números de 5 algarismos em que o primeiro algarismo é diferente de zero.

a) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ b) $2^5 \cdot 3 \cdot 7$ c) $2^4 \cdot 3^3$
d) $2^5 \cdot 3^2$ e) nenhuma das respostas anteriores

V.136 (CESCEM-76) O número de funções injetoras definidas em $A = \{1;2;3\}$ com valores em $B = \{0;1;2;3;4\}$ é:

a) 10 b) 15 c) 60 d) 125 e) 243

V.137 (CESCEM-76) Com os algarismos 0,1,2,5 e 6 sem os repetir, quantos números compreendidos entre 100 e 1000 podermos formar?

a) 10 b) 24 c) 48 d) 60 e) 120

V.138 (CESCEA-76) O total de números múltiplos de 4, com quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, é:

a) 24 b) 48 c) 54 d) 96 e) 120

V.139 (GV-76) Quer-se criar uma comissão constituída de um presidente e mais 3 membros. Sabendo-se que as escolhas devem ser feitas dentre um grupo de 8 pessoas, quantas comissões diferentes podem ser formadas com essa estrutura?

a) 35 b) 280 c) 70 d) 48 e) 24

V.140 (GV-76) As peças de um jogo de dominó são pequenos retângulos de madeira, divididos em duas metades. Em cada metade está marcado um certo número de pontos. As peças são feitas de forma que os totais de pontos que aparecem em cada uma das metades são perfeitamente permutáveis girando-se a peça de meia volta. Por exemplo, a peça (2,5) é também a peça (5,2). Se em cada metade podem aparecer desde nenhum ponto até n pontos, então o número de peças diferentes é:

a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) $\frac{n(n-1)}{2}$ c) $(n+1)!$

d) $\frac{(n+1)!}{2}$ e) $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

V.141 (CESGRANRIO-76) Em um computador digital um *bit* é um dos algarismos 0 ou 1 e uma "palavra" é uma sucessão de *bits*. O número de "palavras" distintas, de 32 *bits*, é:

a) $2(2^{32}-1)$ b) 2^{32} c) $\frac{32 \times 31}{2}$ d) 32^2 e) 2×32

V.142 (ITA-77) Consideremos m elementos distintos. Destaquemos k dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles m elementos tomados (Am, n) podemos formar, de modo em que cada arranjo haja sempre, contiguos e em qualquer ordem de colocação, r (r < n) dos K elementos destacados?

a) $(n-r-1)A_{k,r}\ A_{m-k,n-r}$ b) $(n-r+1)A_{k,r}\ A_{m-r,n-k}$

c) $(n-r-1)A_{k,r}\ A_{m-r,n-k}$ d) $(n-r+1)A_{k,r}\ A_{m-r,n-k}$

e) nenhuma das respostas anteriores

V.143 (CESCEM-77) Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:

a) 1 plano b) 2 planos c) 3 planos d) 4 planos e) 5 planos

V.144 (CESCEM-77) As placas dos automóveis são formadas por duas letras seguidas de 4 algarismos. O número de placas que podem ser formadas com as letras A e B e os algarismos pares, sem repetir nenhum algarismo, é:

a) $4 \cdot C_{5;4}$ b) $4 \cdot A_{5;4}$ c) $2 \cdot C_{5;4}$ d) $2 \cdot A_{5;4}$ e) $2 \cdot P_4$

V.145 (CESCEM-77) O valor de p na equação $\frac{A_{p;3}}{C_{p;4}} = 12$ é:

a) 12 b) 9 c) 8 d) 6 e) 5

V.146 (CESCEA-77) Quantos números ímpares de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

a) 120 b) 60 c) 30 d) 180 e) 90

V.147 (GV-77) O número de combinações de 8 elementos, 3 a 3, que contém um determinado elemento é:

a) 21 b) 42 c) 56 d) 7 e) 27

V.148 (CESGRANRIO-77) Um mágico se apresenta em público vestindo calca e paletó de cores diferentes. Para que ele se possa apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que ele precisa é:

a) 24 b) 11 c) 12 d) 10 e) 8

V.149 (FGV-2ºSEMESTRE-78) Numa classe de 10 estudantes, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado se dois dos dez são marido e mulher e só irão juntos?

a) 98 b) 126 c) 115 d) 165 e) 122

V.150 (FGV-2ºSEMESTRE-78) Dentre 6 números positivos e 6 números negativos, de quantos modos podemos escolher quatro números cujo produto seja positivo?

a) 720 b) 625 c) 30 d) 960 e) 255

V.151 (FGV-1ºSEMESTRE-79) Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, contendo no mínimo 1 diretor?

a) 25 b) 55 c) 500 d) 720 e) 4500

V.152 (FGV-1ºSEMESTRE-79) Uma sala tem 10 portas. O número de maneiras diferentes que essa sala pode ser aberta é:

a) 10! b) $2^{10}-1$ c) 10!/5! d) 500 e) 10

V.153 (FGV-1ºSEMESTRE-79) O valor de x na equação $A_{x,3} - 6\,C_{x,2} = 0$, onde $A_{x,3}$ indica o número de arranjos de x elementos tomados 3 a 3 e C_x2 o número de combinações, é:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

V.154 (MACK-79) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de quatro algarismos distintos. Dentre eles, serão divisíveis por 5:

a) 20 números b) 30 números c) 60 números
d) 120 números e) 180 números

V.155 (MACK-79) Em um teste de múltipla escolha, com 5 alternativas distintas, sendo uma única correta, o número de modos distintos de ordenar as alternativas de maneira que a única correta não seja nem a primeira nem a última é:

a) 36 b) 48 c) 60 d) 72 e) 120

V.156 (PUC-79) O número de maneiras que um professor pode escolher um ou mais estudantes de um grupo de 6 estudantes, é:

a) 56 b) 58 c) 60 d) 63 e) 65

V.157 (PUC-79) O número total de inteiros positivos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4, se nenhum algarismo é repetido em nenhum inteiro, é:

a) 54 b) 56 c) 58 d) 60 e) 64

V.158 (PUC-79) Se $2A_{n,2} + 50 = A_{2n,2}$, então, n é igual a:

a) 5 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

V.159 (FUVEST-80) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:

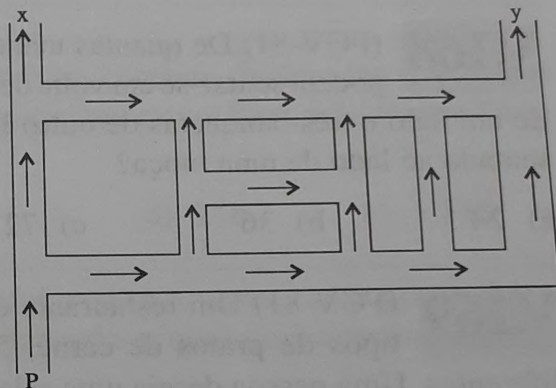
a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 144

V.160 (ITA-80) O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:

a) 36 b) 48 c) 52 d) 54 e) 56

V.161 (FGV-80) Um tabuleiro especial de xadrez possui 16 casas, dispostas em 4 linhas e 4 colunas. Um jogador deseja colocar 4 peças no tabuleiro de tal forma que, em cada linha e cada coluna,seja colocada apenas 1 peça. De quantas maneiras as 4 peças poderão ser colocadas?

a) 64 b) 576 c) 16 d) 4 e) 30

V.162 (CESGRANRIO-80)A figura ao lado representa uma área de ruas de mão única. Em cada esquina em que há duas opções de direção (vide figura) o tráfego se divide igualmente entre elas. Se 512 carros entram na área por P, o número dos que vão sair por Y é:

a) 128 b) 192
c) 256 d) 320
e) 384

V.163 (CESGRANRIO-80) Seja A um conjunto de 4 elementos. O número de funções $f: A \to A$ tais que a equação $f(x) = x$ não tenha solução é:

a) 4 b) 23 c) 72 d) 81 e) 256

V.164 (FGV-81) Num exame um professor dispõe de 12 questões que serão entregues a três alunos, cada um recebendo quatro questões.Quantas diferentes situações teremos?

a) 34.650 b) 12 c) 3.150 d) 2.600 e) 495

V.165 (FGV-81) São dados 10 pontos num plano, dos quais 8 sobre uma mesma reta r e os outros 2 não alinhados com qualquer um dos oito pontos sobre a reta r. Quantos didferentes triângulos podem ser formados usando os pontos dados como vértices?

a) 56 b) 64 c) 80 d) 120 e) 144

V.166 (FGV-81) Uma comissão de três membros vai ser escolhida ao acaso dentre um grupo de quinze pessoas, entre as quais estão Alice e Bárbara. Calcule o número de diferentes comissões que poderão ser formadas,de tal forma que Alice e Bárbara participem dessas comissões.

a) 13 b) 39 c) 420 d) 210 e) n.d.a.

V.167 (FGV-81) Uma urna contém quatro bolas brancas numeradas de 1 a 4 e duas pretas numeradas de 1 a 2. De quantos modos podem-se tirar 4 bolas contendo pela menos duas brancas, considerando-se que as cores e os números diferenciam as bolas?

a) 15 b) 6 c) 8 d) 1 e) 4

V.168 (FGV-81) De quantas maneiras diferentes, três rapazes e três moças podem sentar-se em volta de uma mesa retangular que tem três cadeiras de um lado e três banquetas de outro lado, a fim de que nunca fique uma rapaz sentado ao lado de uma moça?

a) 24 b) 36 c) 72 d) 84 e) 96

V.169 (FGV-81) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

a) 120 b) 144 c) 14 d) 60 e) 12

V.170 (CESGRANRIO-81) Considere cinco pontos, três a três não colineares. Usando esses pontos como os vértices de um triângulo, o número de todos os triângulos distintos que se pode formar é:

a) 5 b) 6 c) 9 d) 10 e) 15

V.171 (STA. CASA-82) Dados os conjuntos A e B, não vazios, sabe-se que o número de aplicações injetoras de A em B é 1320. Se A tem 3 elementos, o número de elementos de B é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15

V.172 (STA. CASA-83) Seja o número natural $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$ onde p_1, p_2, p_3 e p_4 são fatores naturais primos distintos. O número de divisores naturais de **N** é:

a) 4 b) 5 c) 8 d) 12 e) 16

V.173 (STA. CASA-84) Num determinado setor de um hospital trabalham 5 médicos e 10 enfermeiros. Quantas equipes distintas, constituídas cada uma de 1 médico e 4 enfermeiros, podem ser formadas nesse setor?

a) 210 b) 1.050 c) 5.050 d) 10.080 e) 25.200

V.174 (FGV-84) Um viajante, partindo da cidade A, deve chegar à cidade D, passando obrigatoriamente pelas cidades B e C.

Para viajar de A para B existem 3 meios de transporte: avião, navio e trem; de B para C, 2 meios: táxi e ônibus; e de C para D, 3 meios: carroça, moto e bicicleta. Quantas maneiras diferentes existem para viajar de A para D?

a) 8 b) 3 c) mais de 15
d) menos de 10 e) n.r.a.

V.175 (FGV-84) As placas de automóveis constam de duas letras e quatro algarismos. O número de placas que podem ser fabricadas com as letras P, Q, R e os algarismos 0, 1, 7 e 8 é:

a) 2.412 b) 2.304 c) 144 d) 216 e) 1.536

V.176 (FGV-84) Em uma reunião social havia n pessoas; cada uma saudou as outras com um aperto de mão. Sabendo-se que houve ao todo 66 apertos de mão, podemos afirmar que:

a) n é um número primo b) n é um número ímpar c) n é um divisor de 100
d) n é um divisor do 125 d) n é um múltiplo de 6

V.177 (FGV-84) Usando-se os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, existem x números de 4 algarismos de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais. O valor de x é:

a) 505 b) 427 c) 120 d) 625 e) 384

V.178 (FGV-84) Nove pessoas param para pernoitar num motel. Existem 3 quartos com 3 lugares cada. O número de formas que estas pessoas podem se distribuir entre os quartos é:

a) 84 b) 128 c) 840 d) 1.680 e) 3.200

V.179 (CESGRANRIO-84) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 formam-se números naturais de 6 algarismos distintos. Sabendo-se que neles não aparecem juntos dois algarismos pares nem dois algarismos ímpares, então o número total de naturais assim formados é:

a) 36 b) 48 c) 60 d) 72 e) 90

V.180 (VUNESP-85) Seja n um número natural escrito com 3 algarismos a, b e c. Seja S = a + b + c. A soma de todos os números de 3 algarimos que se obtém permutando os algarismos de n é igual ao:

a) produto de 222 por S b) produto de 444 por S c) produto de 202 por S
d) produto de 404 por S e) produto de 666 por S

V.181 (VUNESP-85) Um certo número de garrafas distinguíveis foi arranjado de 3 em 3, de todas as maneiras possíveis. O número desses arranjos foi 120. Então, o número de garrafas é:

a) 12 b) 10 c) 6 d) 5 e) 4

V.182 (ITA-85) O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + t = 7$ é:

a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{11}{4}$ c) $\binom{10}{3}$
d) $\binom{11}{3}$ e) nenhuma das respostas anteriores

V.183 (CESGRANRIO-85) São dadas duas retas paralelas r_1 e r_2. Sobre r_1 marcam-se quatro pontos distintos, e sobre r_2, três pontos também distintos. O número de triângulos distintos que podem ser traçados, com vértices sobre os pontos marcados, é:

a) 15 b) 21 c) 24 d) 28 e) 30

V.184 (FUVEST-88) Dado um quadrado plano ABCD, escolhem-se 3 pontos sobre o lado AB, 5 pontos sobre BC, 2 pontos sobre CD e 1 ponto sobre AD, de tal modo que nenhum desses pontos coincida com algum vértice do quadrado. Seja X o conjunto dos pontos escolhidos. O número de triângulos com vértices em X é:

a) 165 b) 55 c) 61 d) 154 e) 990

V.185 (FGV-88) Dadas duas retas paralelas e distintas, tomam-se 10 pontos distintos na primeira e 6 na segunda. O número de triângulos com vértices nos pontos considerados é:

a) 420 b) 210 c) 105 d) 52 e) n.d.a.

V.186 (FGV-88) Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. De quantos modos podemos permutá-los de modo que os algarismos ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

a) 60 b) 120 c) 150 d) 181 e) 240

V.187 (FATEC-88) Um grupo formado por quatro rapazes e uma senhorita vão visitar uma exposição de arte. Um dos rapazes é um perfeito cavalheiro e, portanto, não passa pela porta da sala de exposições sem que a senhorita já o tenha feito. O número de modos pelos quais eles podem entrar no recinto é:

a) 120 b) 60 c) 48 d) 24 e) 6

V.188 (ITA-89) Considere o desenvolvimento :
$(x + y)^{10} = A_1x^{10} + A_2x^9y + \ldots$, onde x e y são números reais. A oitava parcela do lado direito é igual an $\frac{405}{2}(\log_k 2)^3$ a para algum $k > 1$, $x = \frac{2\log_2 k}{\sqrt{\log 2}}$ e $y = \frac{\sqrt{\log_k 2}}{2\log_2 k}$. Neste caso:

a) $k^2 = 2$ b) $k^2 = 3$ c) $k^3 = 2$
d) $k^3 = 7$ e) $k^3 = 5$

V.189 (FATEC-89) Há 12 inscritos em um campeonato de boxe. O número total de lutas que podem ser realizadas, entre os inscritos, é:

a) 12 b) 24 c) 33 d) 66 e) 132

V.190 (CESGRANRIO-89) Considere todos os n números pares positivos, de quatro dígitos distintos, formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4. Então n é:

a) 10 b) 12 c) 16 d) 18 e) 24

V.191 (CESGRANRIO-90) Em um campeonato de futebol,cada um dos 12 times disputantes joga contra todos os outros uma só vez. O número total de jogos desse campeonato é:

a) 32 b) 36 c) 48 d) 60 e) 66

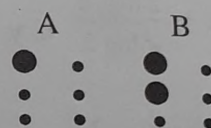
V.192 (FUVEST-91) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar as possíveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente:

a) 100 dias
b) 10 anos
c) 1 século
d) 10 séculos
e) 100 séculos

V.193 (ITA-91) Uma escola possui 18 professores, sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?

a) 875
b) 1.877
c) 1.995
d) 2.877
e) n.d.a.

V.194 (FUVEST-92) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos onde cada caractere é formado por uma matriz de 6 pontos dos quais pelo menos um se destaca em relação aos outros. Assim, como no exemplo ao lado. Qual o número máximo de caracteres distintos que podem ser representados neste sistema de escrita?

a) 63
b) 89
c) 26
d) 720
e) 36

V.195 (ITA-94) Quantos anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?

a) 7.200
b) 7.000
c) 4.800
d) 3.600
e) 2.400

V.196 (FATEC-94) Uma pessoa dispõe de 4 discos diferentes de MPB, 4 discos diferentes de *rock* e 2 discos diferentes de música clássica. O número de modos distintos como essa pessoa pode organizá-los em uma estante, de tal forma que discos do mesmo gênero estejam sempre juntos e os de *rock* sempre na mesma ordem, é:

a) 144
b) 1.152
c) 48
d) 50
e) 288

V.197 (FAAP-94) De quantas maneiras diferentes pode-se riscar em linha reta, o fundo de uma caixa hexagonal entre dois vértices não consecutivos?

a) 15
b) 21
c) 36
d) 6
e) 9

Probabilidade

V.198 (CESCEM-68) Uma urna contém, 1 bola preta e 9 brancas. Uma segunda urna contém x bolas pretas e as restantes brancas num total de 10 bolas. Um primeiro experimento consiste em retirar, ao acaso, uma bola de cada urna. Num segundo experimento, as bolas das duas urnas são reunidas e destas, duas bolas são retiradas ao acaso. O valor mínimo de x a fim de que a probabilidade de sairem duas bolas pretas seja maior no segundo do que no primeiro experimento é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 9

V.199 (CESCEM-68) A tabela abaixo, dá a distribuição de probabilidade dos 4 tipos de sangue de indivíduos numa comunidade.

Probabilidade/Tipos sanguíneos	A	B	AB	O
De ter o tipo especificado	0,20			
De não ter o tipo especificado		0,90	0,95	

A probabilidade de que um indivíduo, sorteado ao acaso, desta comunidade tenha o tipo sanguíneo O vale:

a) 0,267 b) 0,65 c) 0,80
d) 0,95 e) nenhuma das anteriores

V.200 (CESCEA-68) Jogando-se 3 dados (ou um dado 3 vezes) qual a probabilildde de obtermos soma menor ou igual a 4?

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{27}$ d) $\frac{1}{18}$ e) $\frac{1}{54}$

V.201 (FILO-USP-69) Qual a probabilidade do determinante de uma matriz quadrada 2×2 com coeficientes inteiros ser ímpar?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{4}$

V.202 (CESCEM-70) Em cada extração de uma certa loteria, concorrem 40.000 bilhetes. Um indivíduo foi agraciado com 10.000 bilhetes, com os quais ele vai concorrer, podendo, se quizer, dividir os 10.000 bilhetes em duas partes, da maneira que bem entender, para concorrer em duas extrações. Como deve ser feita a divisão para que a probabilidade dele ganhar pelo menos uma vez seja máxima?

a) todos os bilhetes numa extração só
b) 5.000 em uma e 5.000 em outra
c) 2.500 em uma e 7.500 em outra
d) 1.250 em uma e 8.750 em outra
e) nenhuma das anteriores

V.203 (CESCEM-70) Numa cidade com 1.000 eleitores vai haver uma eleição com dois candidatos A e B. É feita uma prévia em que os 1.000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Então a probabilidade de que A ganhe a eleição é:

a) 0,5 b) 1 c) 0,51 d) $\frac{490}{510}$

e) não pode ser calculado porque não é dado quantos eleitores entre os restantes 490 estão ainda indecisos.

V.204 (CESCEM-70) Dois indivíduos A e B vão jogar cara ou coroa com uma moeda honesta. Eles combinam lançar a moeda 5 vezes e ganha o jogo aquele que ganhar em 3 ou mais lançamentos. Cada um aposta 28 cruzeiros. Feitos os dois primeiros lançamentos, em ambos dos quais A vence, eles resolvem encerrar o jogo. Do ponto de vista probabilístico de que forma devem ser repartidos os 56 cruzeiros?

a) metade para cada um b) 42 para A e 14 para B
c) 49 para A e 7 para B d) tudo para A e) nenhuma das anteriores

V.205 (CESCEM-70) De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática Física e Química sabe-se que:

1. 30 destinam-se à Matemática e destes, 20 são do sexo masculino.
2. O total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química.
3. Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nestas condições sorteando-se um aluno ao acaso do grupo total e sabendo-se que é do sexo feminino, a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática vale:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

V.206 (CESCEM-71) Em um espaço amostral $\{A;B\}$ as probabilidades P(A) e P(B) valem, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Assinale qual das alternativas seguintes NÃO é verdadeira:

a) $A \cup B = S$ b) $\overline{A} \cup B = B$ c) $\overline{A} \cup \overline{B} = \varnothing$
d) $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B}$ e) $(A \cap B) \cup (A \cup B) = S$

V.207 (CESCEM-71) Em uma sala existem 5 crianças: uma brasileira, uma italiana, uma japonesa, uma inglesa e uma francesa. Em uma urna existem 5 bandeiras correspondentes aos países de origem destas crianças: Brasil, Itália, Japão, Inglaterra e França. Uma criança e uma bandeira são selecionadas ao acaso, respectivamente, da sala e da urna. A probabilidade de que a criança sorteada não receba a sua bandeira vale:

a) $\frac{1}{25}$ b) $\frac{5}{25}$ c) $\frac{25}{25}$ d) $\frac{20}{25}$ e) $\frac{5}{20}$

V.208 (CESCEM-71) Sabendo-se que os erros de impressão tipográfica, por página impressa, se distribuem de acordo com as seguintes probabilidades:

Nº de erros por página	Probabilidades
0	0,70
1	0,15
2	0,10
3	0,02
4	0,02
5 ou mais	0,01

Nestas condições:

A probabilidade de que numa página impressa existam estritamente mais do que três erros tipográficos vale:

a) 0,05 b) 0,03 c) 0,02 d) 0,0003 e) 0,0002

A probabilidade de que em duas páginas impressas existam no total exatamente quatro erros tipográficos, vale:

a) 0,0200 b) 0,0270 c) 0,0440 d) 0,4900 e) 0,7000

V.209 (CESCEM-71) Um experimento consiste no lançamento de um cubo cujas faces estão numeradas de 1 a 6. Seja E_i o evento: sair a face que contém o número i(i = 1,2,...,6). Seja, ainda, $P(E_i)$ a probabilidade de ocorrência do evento E , onde $P(E_i) = P(E_i) = \frac{i}{21}$

Suponhamos construida a teoria das probabilidades baseada nos três axiomas:

$P(A) \geq 0$ (I)

$P(S) = 1$ (II)

$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ (III)

onde A,B e C são eventos do espaço amostral S; B e C são eventos mutuamente exclusivos. Nestas condições, as probabilidades definidas no experimento anterior;

a) não satisfazem a nenhum dos três axiomas
b) satisfazem somente ao axioma I
c) satisfazem somente ao axioma III
d) satisfazem somente aos axiomas I e II
e) satisfazem aos axiomas I,II e III

V.210 (CESCEM-71) Em um jogo de cara ou coroa, em cada tentativa,a moeda é lançada 3 vezes consecutivas. Uma tentativa é considerada um sucesso se o número de vezes que se obtém cara supera estritamente o número de vezes que se obtém coroa. A probabilidade de se obterem 2 sucessos nas 2 primeiras tentativas é:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{13}{16}$ e) $\frac{1}{64}$

V.211 (CESCEM-71) Têm-se duas moedas das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomada ao acaso é lançada. A probabilidade de se obter cara é:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{4}$

e) estritamente maior que $\frac{1}{2}$, não se podendo afirmar mais nada

V.212 (CESCEA-71) Tirando-se, ao acaso, 5 cartas de um baralho de 52 cartas, a probabilidade de sair exatamente 3 valetes é:

a) $\frac{4}{54}$ b) $\frac{4 \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}}$ c) $\frac{4 \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}}$ d) $\frac{3}{52}$ e) não sei

V.213 (CESCEA-74) Lançando-se 4 vezes uma moeda honesta, a probabilidade de que ocorra cara exatamente 3 vezes é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{7}{16}$ d) $\frac{1}{4}$ e) não sei

V.214 (CESCEA-76) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento retirada de uma bola, e considere os eventos:

A = {a bola retirada possui um número múltiplo de 2}
B = {a bola retirada possui um número múltiplo de 5}

Então, a probabilidade do evento $A \cup B$ é:

a) $\frac{13}{20}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{11}{20}$

V.215 (FUVEST-77) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior do que o da primeira é:

a) $\frac{72}{81}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{36}{81}$ d) $\frac{30}{81}$ e) $\frac{45}{81}$

V.216 (FUVEST-77) Numa urna são depositadas n etiquetas numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição).Qual a probabilidade de que os números sorteados sejam consecutivos?

a) $\frac{(n-2)!}{n!}$ b) $\frac{(n-3)!}{n!}$ c) $\frac{(n-2)!}{3!\,n!}$

d) $\frac{(n-2)!\,3!}{n!}$ e) $6(n-2)(n-1)$

V.217 (SANTA CASA-77) Numa gaveta há 10 pares distintos de meias, mas ambos pés de um dos pares estão rasgados. Tirando-se da gaveta um pé de meia por vez, ao acaso, a probabilidade de tirarmos dois pés de meia do mesmo par, não rasgados, fazendo 2 retiradas é:

a) $\frac{379}{380}$ b) $\frac{306}{380}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{36}{380}$ e) $\frac{18}{380}$

V.218 (SANTA CASA-77) Dispõe-se de um mapa. Dispõe-se também de um dado com 3 faces vermelhas e 3 faces azuis.

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15

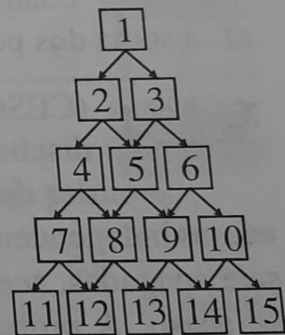
Considerando as regras:

I - partindo do quadro 1, pode-se caminhar, no sentido indicado pelas setas para os demais quadros, a cada lançamento do dado.

II - lançando-se o dado, se sair face azul, segue-se pela seta da direita até o quadro seguinte.

III - lançando-se o dado, se sair face vermelha, segue-se pela seta da esquerda até o quadro seguinte.

A probabilidade de chegar ao quadro 13, partindo de 1, é:

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{4}{16}$ c) $\frac{6}{16}$ d) $\frac{8}{16}$ e) $\frac{12}{16}$

V.219 (CESGRANRIO-77) Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e o mostra a um jogador. A probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

V.220 (UFSCAR-SP-79) Uma urna tem 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Se retirarmos uma bola da urna, a probabilidade de não obtermos a bola número 7 é igual a:

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{9}{10}$ e) $\frac{9}{11}$

V.221 (CESGRANRIO-79) Um predio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. A probabilidade de que cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado é:

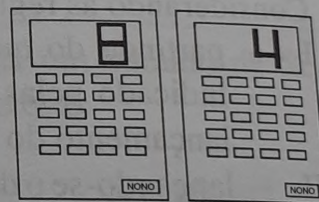
a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

V.222 (SANTA CASA-80) Numa caixa são colocados 10 cartões com as letras A, G, I, L, N, O, R, T, U e com o acento circunflexo ^. Uma pessoa vai tirando cartão por cartão. Quando sai o acento circunflexo ela o coloca sobre a última letra até então retirada. Se o circunflexo for o primeiro cartão, ela o coloca sobre a primeira letra que tirar em seguida. Qual a probabilidade dessa pessoa montar a palavra TRIÂNGULO?

a) $\frac{1}{10!}$ b) $\frac{1}{10!9!}$ c) $\frac{1}{9!}$ d) $\frac{9!}{10!}$ e) n.d.a.

V.223 (FEI-80) Num lançamento de dois dados honestos, calcule a probabilidade de:

a) a soma dos pontos ser ímpar b) o produto dos pontos ser ímpar

V.224 (CESGRANRIO-80) Sete lâmpadas de néon são dispostas formando um "oito", como no mostrador de uma calculadora (figura I), e podem ser acesas independentemente uma das outras. Estando todas as sete apagadas, acendem-se quatro delas ao mesmo tempo, ao acaso. A probabilidade de ser formado o algrismo 4, como aparece na figura II, é:

a) $\frac{1}{35}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{28}$

V.225 (FUVEST-81) Seis pessoas A,B,C,D,E e F vão atravessar um rio em 3 barcos.

Distribuindo-se ao acaso as pessoas de modo que fiquem duas em cada barco, a probabilidade de A atravessar junto com B, e junto com D e E junto com F é:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{20}$ e) $\frac{1}{25}$

V.226 (FUVEST-82) Considerando um polígono regular de n lados, $n \geq 4$, e tomando-se ao acaso uma das diagonais do polígono, a probabilidade de que ela passe pelo centro é:

a) 0 se n é par   b) $\frac{1}{2}$ se n é ímpar   c) 1 se n é par

d) $\frac{1}{n}$ se n é ímpar   e) $\frac{1}{n-3}$ se n é par

V.227 (CESGRANRIO-82) Num jogo com um dado, o jogador X ganha se tirar, no seu lance, um número de pontos maior ou igual ao do lance do jogador Y. A probabilidade de X ganhar é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{13}{24}$ e) $\frac{19}{36}$

V.228 (FUVEST-83) Escolhendo ao acaso duas arestas de um cubo, a probabilidade de elas serem reversas é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{5}{11}$

V.229 (FUVEST-83) Escolhendo-se ao acaso duas arestas de um cubo, a probabilidade de elas serem reversas é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{5}{11}$

V.230 (CESGRANRIO-83) A probabilidade de um inteiro n, $1 \leq n \leq 900$, ser múltiplo de 9 é:

a) $\frac{1}{999}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{9}$

V.231 (FUVEST-84) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que seja primo é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

V.232 (FGV-84) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8 é:

a) $\frac{3}{25}$ b) $\frac{7}{50}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{8}{50}$ e) $\frac{1}{5}$

V.233 (CESGRANRIO-84) Dois dados são lançados sobre uma mesa. A probabildiade de ambos os dados mostrarem, na face superior, números ímpares é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

V.234 (VUNESP-85) No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos, a probabilidade de sair como soma dos pontos um número primo é um número:

a) que está entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$

b) que está entre $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$

c) que está entre $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{6}$

d) maior que $\frac{1}{2}$

e) menor que $\frac{1}{6}$

V.235 (FUVEST-86) Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 20. Qual a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

a) $\frac{9}{38}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{8}{25}$

V.236 (VUNESP-87) Os casais A e B têm dois filhos cada um. Sabe-se que o casal A tem um filho homem e que o filho mais velho do casal B também é homem. Se a e b indicam, respectivamente, as probabilidades de que os dois filhos do casal A sejam homens e que os dois filhos do casal B também sejam homens, então:

a) $a > b$ a) $a = b$ c) $a < b$ d) $a + b = 1$

e) nenhuma das respostas anteriores é vardadeira

V.237 (CESGRANRIO-87) Se um dado é lançado três vezes,a probabilidade de serem obtidos, em qualquer ordem, os valores 1, 2 e 3 é:

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{72}$ c) $\frac{1}{108}$ d) $\frac{1}{120}$ e) $\frac{1}{216}$

V.238 (VUNESP-88) João lança um dado sem que Antonio veja. João diz que o número mostrado pelo dado é par. A probabilidade agora de Antonio acertar é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{36}$

V.239 (VUNESP-89) Dois jogadores A e B vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, A ganha e se essa soma for 8, B é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que A não ganhou. Qual a probabilidade de B ter ganho?

a) $\frac{10}{36}$ b) $\frac{5}{32}$ c) $\frac{5}{36}$ d) $\frac{5}{35}$

e) Não se pode calcular sem saber os números sorteados

V.240 (CESGRANRIO-89) Em uma amostra de 500 peças, existem exatamente quatro defeituosas. retirando-se, ao acaso, uma peça dessa amostra, a probabilidade de ela ser perfeita é de:

a) 99,0% b) 99,1% c) 99,2% d) 99,3% e) 99,4%

V.241 (FUVEST-90) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoas percebeu que a face 6 saía com o dobro de freqüência da face 1, e que as outras faces saíam com a freqüência esperada em um dado não viciado. Qual a freqüência da face 1?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{1}{12}$

V.242 (VUNESP-90) Um baralho consiste em 100 cartões numerados de 1 a 100. Retiram-se 2 cartões ao acaso (sem reposição). A probabilidade de que a soma dos dois números dos cartões retirados seja igual a 100 é:

a) $\frac{49}{4950}$ b) $\frac{50}{4950}$ c) 1% d) $\frac{49}{5000}$ e) $\frac{51}{4851}$

V.243 (VUNESP-91) Numa gaiola estão 9 camundongos rotulados 1,2,3...,9. Selecionando-se conjuntamente 2 camundongos ao acaso (todos tem igual possibilidade de ser escolhidos), a probabilidade de que na seleção ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é:

a) 0,3777... b) 0,47 c) 0,17 d) 0,2777... e) 0,1333...

V.244 (CESGRANRIO-91) Lançando-se um dado duas vezes, a probabilidade de ser obtido o par de valores 2 e 3, em qualquer ordem, é de:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{18}$

V.245 (FUVEST-93) Escolhe-se ao acaso três vértices distintos de um cubo. A probabilidade de que estes vértices pertençam a uma mesma face é:

a) $\frac{3}{14}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{5}{14}$. d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{13}{18}$

V.246 (VUNESP-94) Após uma partida de futebol, em que as equipes jogaram com as camisas numeradas de 1 a 11 e não houve substituições, procede-se ao sorteio de 2 jogadores de cada equipe para exame anti-doping. Os jogadores da 1ª equipe são representados por 11 bolas numeradas de 1 a 11 de uma urna A e os da 2ª, da mesma maneira, por bolas de uma urna B. Sorteia-se primeiro, ao acaso e simultaneamente, uma bola de cada urna. Depois, para o segundo sorteio, o processo deve ser repetido com as 10 bolas restantes de cada urna. Se na primeira extração foram sorteados dois jogadores de números iguais, a probabilidade de que aconteça o mesmo na segunda extração é de :

a) 0,09 b) 0,1 c) 0,12 d) 0,2 e) 0,25

B – QUESTÕES DISCURSIVAS

V.247 (MAPOFEI-69) a) Enunciar o princípio da indução completa (ou da recorrência) ;
b) Aplicando o princípio da indução completa, demonstrar que a soma dos cubos de n primeiros números naturais é igual ao quadrado da soma desses números.

V.248 (MAPOFEI-73) Seja P o conjunto dos pontos de p retas ($p \geq 2$), duas a duas paralelas, de um plano. Seja Q o conjunto dos pontos de q retas ($q \geq 2$), duas a duas paralelas, do mesmo plano, concorrentes com as p primeiras. Calcule o número total de paralelogramos de vértices pertencentes ao conjunto $P \cap Q$ e de lados contidos no conjunto P Q.

V.249 (MAPOFEI-73) Seja x um número real estritamente positivo e diferente de 1. Prove que:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

V.250 (MAPOFEI-74) Demonstrar por indução finita que:

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n}{3} \cdot (n+1)(2n+1)$$

V.251 (MAPOFEI-74) Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas, das quais pelo menos 4 bolas sejam pretas?

V.252 (MAPOFEI-74) A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses. Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formadas?

V.253 (MAPOFEI-74) Calcular o valor da expressão:

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

V.254 (MAPOFEI-75) Calcular a e b sabendo que $(a + b)^3 = 64$ e que

$$a^5 - \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 - \binom{5}{3} a^2 b^3 - \binom{5}{4} ab^4 - b^5 = -32$$

V.255 (MAPOFEI-75) São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em 3 quaisquer dos 12 pontos?

V.256 (MAPOFEI-75) Quantas palavras distintas podemos formar com a palavra PERNAMBUCO? Quantas começam com a sílaba PER?

V.257 (MAPOFEI-75) Se n é um número natural e $n \geq 2$, provar por indução finita que $n^3 - n$ é divisível por 3.

V.258 (MAPOFEI-76) Um químico possui 10 tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 dessas substâncias se, entre as 10, duas somente não podem ser juntadas porque produzem mistura explosiva?

V.259 (MAPOFEI-76) Escreva n parcelas contendo o desenvolvimento de $(k+1)^3$ para $k = 1,2,3,\ldots,n$. Some todas as parcelas, elimine os termos semelhantes e obtenha $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

V.260 (FUVEST-77) Sorteiam-se dois números naturais ao acaso entre 101 e 1.000, inclusive, com reposição. Calcule a probabilidade de que o algarismo das unidades do produto dos números sorteados não seja zero.

V.261 (FUVEST-78) $\log(A - B) + \sum_{i=o}^{i=n} \log\left(A^{2^i} + B^{2^i}\right) = \log\left(A^k - B^k\right)$

Calcule k em função de n

V.262 (FUVEST-79) Considere os números obtidos do número 12345 efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando esses números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?

V.263 (FEI-79) Dados os binômios $A_{(x)} = x^3 + 1$ e $B_{(x)} = x^3 - 1$:

a) Determine k e n, tais que o 4º termo da expansão binomial de $\left[B_{(x)}\right]^n$ seja kx^6

b) Se n é ímpar, ache a soma dos coeficientes do polinômio $\left[A_{(x)}\right]^n \cdot \left[B_{(x)}\right]^n$.

V.264 (FUVEST-80) Uma urna contém 3 bolas; uma verde, uma azul e uma branca. Tira-se uma bola ao acaso, registra-se a cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se essa experiência mais duas vezes. Qual a probabilidade de serem registradas três cores distintas?

V.265 (FUVEST-81) Duas pessoas A e B jogam dado alternadamente, começando com A, até que uma delas obtenha um “6”; as 1ª que obtiver o “6”ganha o jogo.

Qual a probabilidade de:

a) A ganhar na 1ª jogada?
b) B ganhar na 2ª jogada?
c) A ganhar o jogo?

V.266 (FUVEST-82) Dado um polígono convexo P com n lados, calcular o número de polígonos convexos cujos vértices são vértices de P.

V.267 (FUVEST-83) Duas pessoas A e B arremessam moedas. Se A faz dois arremessos e B faz um, qual a probabilidade de A obter o mesmo nº de "coroas" que B?

V.268 (FUVEST-84) Seja P o conjunto dos 17 vértices de um heptadecágono regular.

a) Qual o número de triângulos cujos vértices pertencem a P?
b) Calcule o número de polígonos convexos cujos vértices pertencem a P.

V.269 (FUVEST-85) Em uma loteria com 30 bilhetes, 4 são premiados. Comprando-se 3 bilhetes, qual a probabilidade de

a) nenhum deles ser premiado?
b) apenas um ser premiado?

V.270 (FUVEST-85) Seja V o conjunto dos vértices de uma pirâmide de base quadrada. Determine:

a) o número de triângulos cujos vértices são pontos de V;
b) o número de circunferências que passam por pelo menos 3 pontos de V.

V.271 (UNICAMP-87) Sete tijolos, cada um de uma cor, são empilhados. De quantos modos se pode fazer isto de forma que o verde e o amarelo estejam sempre juntos?

V.272 (UNICAMP-87) Num grupo de 400 homens e 600 mulheres, a probabilidade de um homem estar com tuberculose é de 0,05 e de uma mulher estar com tuberculose é de 0,10.

a) Qual a probabildiade de uma pessoa do grupo estar com tuberculose?
b) Se uma pessoa é retirada ao acaso e está com tuberculose, qual a probabilidade de que seja homem?

V.273 (UNICAMP-88) Numa kombi viajam 9 pessoas, das quais 4 podem dirigir. De quantas maneiras diferentes é possível acomodá-las na kombi (3 no banco da frente, 3 no banco do meio e 3 no banco de trás) de forma que uma das 4 que dirigem ocupe o lugar da direção?

V.274 (UNICAMP-88) Ao se tentar abrir uma porta com um chaveiro contendo várias chaves parecidas, das quais apenas uma destranca a referida porta, muitas pessoas acreditam que é mínima a chance de se encontrar a chave certa na 1ª tentativa, e chegam mesmo a dizer que essa chave só vai aparecer na última tentativa. Para esclarecer essa questão, calcule, no caso de um chaveiro contendo 5 chaves,

a) a probabildiade de se encontrar a chave certa depois da 1ª tentativa;

b) a probabilidade de se acertar na 1ª tentativa;

c) a probabilidade de se acertar somente na última tentativa

V.275 (FUVEST-88) Em um plano, m retas paralelas são cortadas por n retas também paralelas. determine o número de paralelogramos cujos lados estão contidos nessas retas.

V.276 (UNICAMP-89) As avenidas de uma cidade estão dispostas na direção norte-sul e as ruas na direção leste-oeste.

Um trabalhador, que reside numa das esquinas dessa cidade, trabalha numa firma localizada noutra esquina, duas quadras ao sul e três quadras a leste. Quantos caminhos (possíveis) o trabalhador pode seguir para ir de sua casa à fábrica, percorrendo sempre a menor distância? Explique seu raciocínio.

V.277 (UNICAMP-89) Uma Câmara Municipal é composta de vereadores de três partidos A,B e C, assim distribuídos: 3 do partido A,6 do partido B e 9 do partido C.

a) Qual a menor comissão (em número de vereadores) que se pode formar nessa Câmara mantendo-se a mesma proporcionalidade partidária?

b) Quantas comissões diferentes com essa característica, podem ser formadas?

V.278 (FUVEST-90) Um fichário tem 25 fichas, etiquetadas de 11 a 35.

a) Retirando-se uma ficha ao acaso, qual probabilidade é maior: de ter etiqueta par ou ímpar? Por quê?

b) Retirando-se ao acaso duas fichas diferentes,calcule a probabildiade de suas etiquetas tenham números consecutivos.

V.279 (UNICAMP-90) Numa festa a que compareceram somente casais,todas as mulheres cumprimentaram todos os outros convidados (exceto o marido) com um beijo no rosto e todos os homens cumprimentaram todos os demais homens convidados com um aperto de mãos. Se aconteceram 190 beijos a mais que apertos de mãos, quantos eram os casais presentes?

V.280 (UNICAMP-91) Suponha que uma universidade passe a preencher suas vagas por sorteio dos candidatos inscritos ao invés de fazê-lo por meio de um exame vestibular. Sabendo que 10% das matrículas dessa universidade são de candidatos chamados na 2ª lista (na qual não figuram nomes da 1ª lista), determine a probabilidade de ingresso de um candidato cujo nome esteja na 2ª lista de sorteados num curso que tenha 1.400 inscritos para 70 vagas.

V.281 (UNICAMP-91) Sabendo que número de telefone não começam com O nem com 1, calcule quantos diferentes números de telefone podem ser formados com 7 algarismos.

V.282 (FUVEST-92) Numa urna há:
- uma bola numerada com o número 1;
- duas bolas com o número 2;
- três bolas com o número 3, e assim por diante, até n bolas com o número n.

Uma bola é retirada ao acaso desta urna.
Admitindo-se que todas as bolas têm a mesma probabildiade de serem escolhidas, qual é, em função de n, a probabilidade de que o número da bola retirada seja par?

V.283 (UNICAMP-92) A desigualdade $(1+x)^n \geq 1 + nx$ é válida para $x \geq -1$ e n inteiro positivo. Faça a demonstração dessa desigualdade, apenas no caso mais simples em que $x \geq 0$ e n um nº inteiro positivo.

V.284 (UNICAMP-92) De quantas maneiras distintas podem ser escolhidos 3 números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par? Justifique sua resposta.

V.285 (FUVEST-93) Considere experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (todas as seis faces têm probabilidades iguais).
Com relação a esse experimento considere os seguintes eventos:
a) Os eventos I e II são independentes?
b) II e III são eventos independentes?

V.286 (FUVEST-93) A figura ao lado mostra parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola.
Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para Norte ou leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?

V.287 (VUNESP-94) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal A e 11 por uma parasitose intestinal B, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de A e B. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra. Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por A e a segunda por B.

V.288 (FUVEST-94) O jogo da sena consiste no sorteio de 6 números distintos escolhidos ao acaso, entre os números 1,2,3,..., até 50. Uma aposta consiste na escolha (pelo apostador) de 6 números distintos entre os 50 possíveis, sendo premiadas aquelas que acertarem 4 (quadra) , 5 (quina) ou todos os 6 (sena) números sorteados.

Um apostador, que dispõe de muito dinheiro para jogar, escolhe 20 números e faz todos os $\binom{20}{6} = 38760$ jogos possíveis de serem realizados com esses 20 números. Realizado o sorteio, ele verifica que todos os 6 números sorteados estão entre os 20 que ele escolheu. Além de uma aposta premiada com a sena.

a) quantas apostas premiadas com a quina este apostador conseguiu?
b) quantas apostas premiadas com a quadra ele conseguiu?

V.289 (PUC-94) Dos 50 candidatos que se apresentaram para preencher as vagas de empregos em certa empresa, sabe-se que: 40% são fumantes e 50% têm curso superior. Se 75% dos fumantes não têm curso superior, qual é a probabilidade de serem selecionados 2 candidatos que não fumem e não tenham curso superior?

V.290 (EPUSP-62) Determinar os valores de x que tornam iguais o 4º e o 5º termos do desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x-3}\right)^7$.

V.291 (ITA-63) Demonstrar a relação de Euler:

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-2} + \ldots\ldots + \binom{m}{p}\binom{n}{0}$$

Sugestão: utilizar a identidade $(1 + x)^{m+n} = (1 + x)^m (1 + x)^n$.

V.292 (POLI-65) De quantas maneiras diferentes podem-se colocar os quatro cavalos de um jogo de xadrez (2 brancos iguais e 2 pretos iguais) no tabuleiro do mesmo jogo (64 casas)?

V.293 (IME-66) Determinada organização estabeleceu um sistema de código em que os símbolos são formados por um ou mais pontos, até o máximo de 6 pontos, dispostos de maneira a ocuparem os vértices e os pontos médios dos lados maiores de um retângulo. Qual o número total de símbolos obtidos?

V.294 (EPUSP-61) Quantas diagonais, não das faces, tem um prisma cuja base é um polígono de n lados?

V.295 (VUNESP-95) Nove times de futebol vão ser divididos em 3 chaves, todas com o mesmo número de times, para a disputa da 1ª fase de um torneio. Cada uma das chaves já tem um cabeça de chave definido. Nessas condições, o número de maneiras possíveis e diferentes de se completarem as chaves é:

a) 21 b) 30 c) 60 d) 90 e) 120

V.296 (VUNESP-95) Uma pesquisa sobre os grupos sanguíneos ABO na qual foram testadas 6000 pessoas de uma mesma raça, revelou que 2527 têm o antígeno A, 2234 o antígeno B e 1846 não em nenhum antígeno. Nessas condições, qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, escolhida aleatoriamente, tenha os dois antígenos?

V.297 (UNICAMP-95) Um dado é jogado três vezes, uma após a outra. Pergunta-se:

a) Quantos são os resultados possíveis em que os três números obtidos são diferentes?

b) Qual a probabilidade da soma dos resultados ser maior ou igual a 16?

V.298 (FUVEST -95) Quantos são os números inteiros positivos de 5 algarismos que não têm algarismos adjacentes iguais?

a) 5^9 b) 9.8^4 c) 8.9^4 d) 8^5 e) 9^5

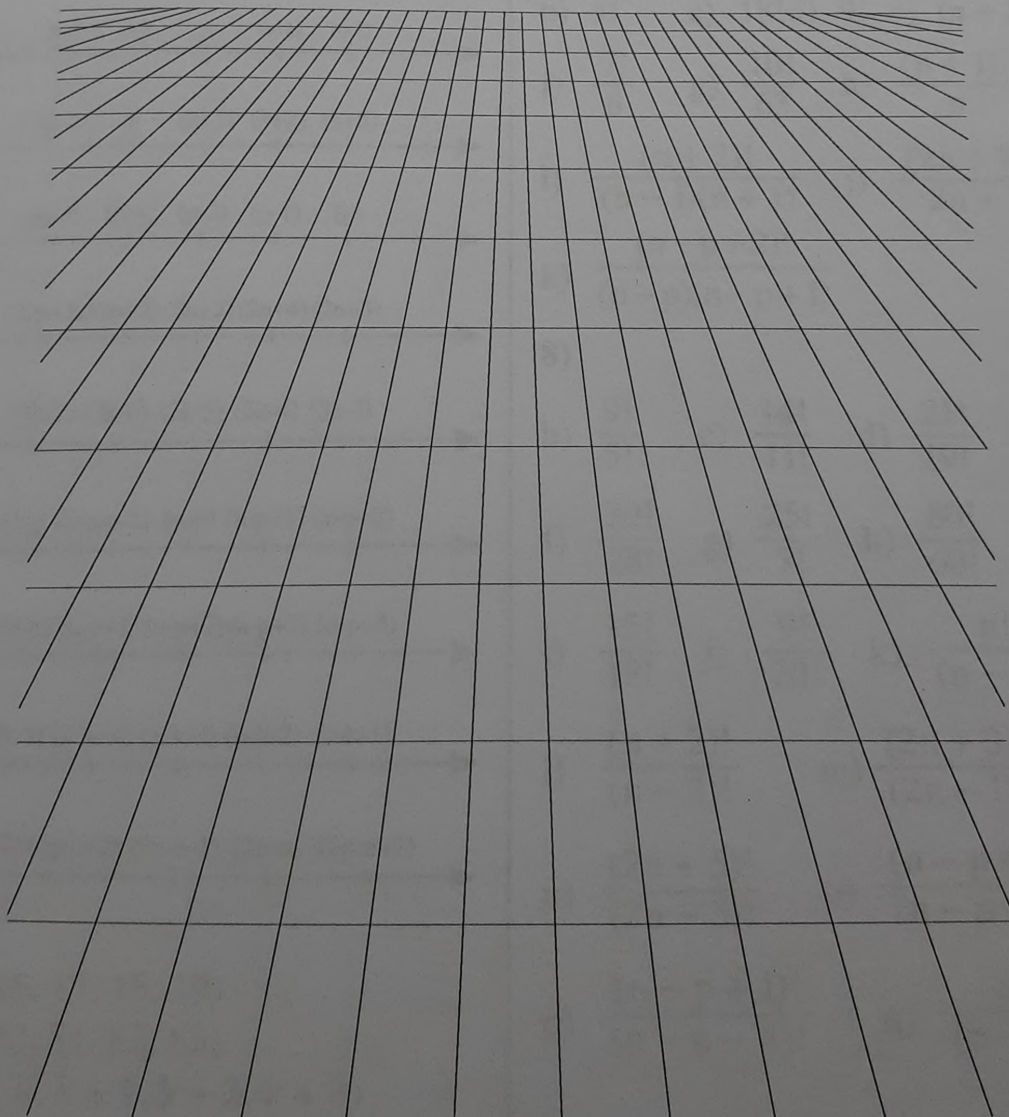
V.299 (FUVEST-95) Lembrando que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

a) calcule $\binom{6}{4}$ b) simplifique a fração $\dfrac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$

c) determine os inteiros n e p de modo que $\dfrac{\binom{n}{p}}{1} = \dfrac{\binom{n}{p+1}}{2} = \dfrac{\binom{n}{p+2}}{3}$

V.300 (FUVEST-95) a) uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a $\dfrac{2}{3}$?

b) considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e x bolas azuis. Uma bola é retirada do acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente ao acaso, uma bola dessa urna. Para que valores de x a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\dfrac{1}{2}$?

Respostas

Capitulo 1

1)

a) 120 b) 3 c) -5 d) 4 e) $\frac{1}{6}$

f) $\frac{13}{360}$

2)

a) 1 b) 1 c) 2 d) 6 e) 24
f) 120 g) 720 h) 5040
i) 40 320 j) 362 880 k) 3 628 800

3)

a) $S=\{3\}$ b) $S=\varnothing$ c) $S=\{0, 1\}$
d) $S=\{5\}$ e) $S=\{4\}$

4)

b)

39 40 41 42 43

c)

(n-2) (n-1) n (n+1) (n+2)

d)

(k-1) k (k+1) (k+2) (k+3)

e)

(p-4) (p-3) (p-2) (p-1) (p)

f)

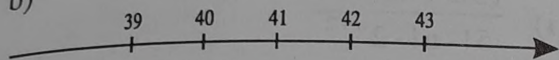
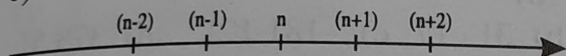
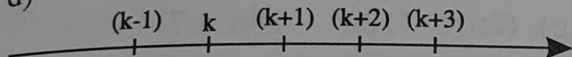
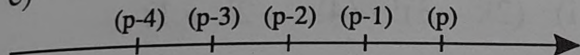
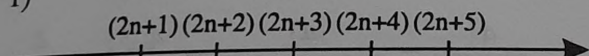
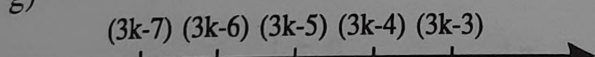
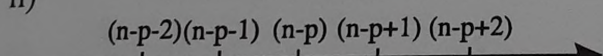
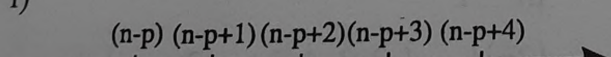
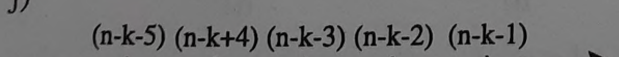
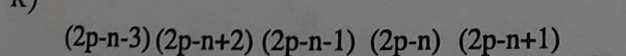
(2n+1) (2n+2) (2n+3) (2n+4) (2n+5)

g)

j)

(n-k-5) (n-k+4) (n-k-3) (n-k-2) (n-k-1)

k)

(2p-n-3) (2p-n+2) (2p-n-1) (2p-n) (2p-n+1)

5)

b) (15, 16, 17, 18, 19)
c) (79, 80, 81, 82, 83)
d) $(k-1, k, k+1, k+2, k+3)$
e) $(n-6, n-5, n-4, n-3, n-2)$
f) $(p, p+1, p+2, p+3, p+4)$
g) $(k-2, k-1, k, k+1, k+2)$
h) $(n-p-3, n-p-2, n-p-1, n-p, n-p+1)$
i) $(2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n, 2n+1)$
j) $(2n-p-1, 2n-p, 2n-p+1, 2n-p+2, 2n-p+3)$
k) $(n-k-4, n-k-3, n-k-2, n-k-1, n-k)$

6)

b) $3 . 2!$ c) $12 . 11!$ d) $100 . 99!$
e) $n . (n-1)!$ f) $(n+2) . (n+1)!$
g) $(n-1) . (n-2)!$
h) $(n-3) . (n-4)!$
i) $2n . (2n-1)!$

7)

b) $4!$ c) $18!$ d) $9!$ e) $(n+2)!$

f) $\frac{7!}{6}$ g) $\frac{10!}{63}$ h) $\frac{(n+1)!}{n}$

i) $\frac{(n+2)!}{(n-1)(n+1)}$ j) $\frac{(2n+2)!}{2n+1}$

k) $\frac{(n-p+2)!}{(n-p)(n-p+1)}$

8)

b) $\frac{9!}{5!}$ c) $\frac{14!}{11!}$ d) $\frac{21!}{19!}$ e) $\frac{7!}{3!}$

f) $\frac{30!}{28!}$ g) $\frac{25!}{7!}$ h) $\frac{80!}{60!}$

i) $\frac{15!}{18!}$ j) $\frac{9!}{20!}$ k) $\frac{n!}{(n-3)!}$

l) $\frac{(n+2)!}{(n-2)!}$ m) $\frac{(2n+3)!}{(2n-1)!}$

n) $\frac{(2n+5)!}{(2n-3)!}$ o) $\frac{(n-p+2)!}{(n-p-1)!}$

p) $\frac{(n-p+1)!}{(n-p-4)!}$, q) $\frac{n!}{(n-p)!}$

9)

b) $3 \,.\, 4 \,. = 60$ c) 9

d) $\dfrac{1}{7.8} = \dfrac{1}{56}$ e) $\dfrac{1}{7.6.5.4} = \dfrac{1}{840}$

f) 35 g) $\dfrac{1}{101.102} = \dfrac{1}{10.302}$

h) $\dfrac{7}{92}$ i) $\dfrac{37.103}{13.14}$

j) $\dfrac{10.9.8}{1.2.3} = 120$ k) $\dfrac{8.7}{1.2} = 28$

l) 12 m) 1

10)

a) $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \dfrac{1}{n+1}$

b) $(n+1)\cdot n$ c) $(n+4)(n+3)$

d) $\dfrac{1}{(n-3)(n-4)}$

e) $\dfrac{1}{(n-p)(n-p-1)}$

f) $(n-p+1)(n-p)(n-p-1)$
$(n-p-2)$

g) $\dfrac{1}{(m-n+1)(m-n)}$

h) $(2n+3)(2n+2)$ i) $\dfrac{n-p}{n+1}$

j) $\dfrac{(2n+1)\cdot 2n}{(n-p+1)(n-p)}$

k) $\dfrac{(n+2)(n+1)n}{n(n+1)} = n+2$

l) $\dfrac{(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)\cdot n} = \dfrac{1}{n}$

11)

b) $2^3 \cdot 3!$ c) $2^4 \cdot 4!$ d) $2^{11} \cdot 11!$

$2^4 \,.\, (3.4.5.6) = \dfrac{2^4.1.2.3.4.5.6}{1.2} =$

e) $= \dfrac{2^4.6!}{2!}$

f) $\dfrac{2^{11} \cdot 15!}{4!}$ g) $P_p = 2^n \cdot n!$

h) $\dfrac{2^{n-1} \cdot (n+2)!}{3!}$

12)

b) $\dfrac{5!}{2^2 \cdot 2!}$ c) $\dfrac{9!}{2^4 \cdot 4!}$ d) $\dfrac{15!}{2^7 \cdot 7!}$

e) $\dfrac{37!}{2^{18} \cdot 18!}$ f) $\dfrac{13!}{3! \cdot 6! \cdot 2^5}$

g) $\dfrac{25! \cdot 3!}{7! \cdot 12! \cdot 2^9}$

h) $P_i = \dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \dfrac{(2n-1)!}{2^{n-1} \cdot (n-1)!}$

i) $\dfrac{(2n+1)! \cdot 2!}{5! \cdot n! \cdot 2^{n-2}}$

13)

b) $3! \cdot 17$ c) $-181 \cdot 12!$ d) $373.5!$

e) $n!(n+2)$ f) $(n-1)! \cdot (n^2-1)$

g) $(2n)! \cdot (12n^2 + 18n + 7)$

h) $(n-p-2)! \cdot (n-p-6)$

i) $(2k-3)! \cdot (4k^2 - 2k + 1)$

14)

a) $\dfrac{4!}{3!+5!} = \dfrac{4!}{3!(1+5.4)} = \dfrac{4.3!}{3!.21} = \dfrac{4}{21}$

b) $\dfrac{n!}{3}$ c) $\dfrac{n-1}{n(n+1)}$ d) $n-p+1$

e) $\dfrac{m^2}{m-1}$

f) $\dfrac{(2n)!}{n!} = \dfrac{1.2.3.4.5.\ldots(2n-1).2n}{n!} =$

$= \dfrac{[1\cdot 3\cdot 5 \cdot\ldots.(2n-1)]\cdot[2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2n)]}{n!} =$

$= \dfrac{[1\cdot 3\cdot 5\ldots.(2n-1)]\cdot(2\cdot 2\cdot 2\ldots 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)}{n!} =$

$= 2^n \cdot$ Pi onde Pi é o poduto dos **n** primeios números ímpares

15)

a) mdc = 3! ; mmc = 6!

b) mdc = 2! ; mmc = 8!

c) mdc = (n – 1)! ; mmc = (n + 2)!

d) mdc = 3! 10 ! ; mmc = 5! 12!

e) mdc = (k – 1)! (n – k – 1)! ; mmc = (k + 1)! (n – k)!

f) primeiro devemos fatorar as expressões dadas:
$A = n!\,n$
$B = (n-1)!\,2^2 n$. Então, temos:
$mdc = (n-1)!\,n$; $mmc = n!\,4n$

16)

a) $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{3 \cdot 4 + 4 - 1}{4!} = \frac{15}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{n}{(n+1)!}$

d) $\frac{17!}{4!\,13!} + \frac{17!}{5!\,12!} = \frac{5 \cdot 17! + 13 \cdot 17!}{5!\,13!} = \frac{17!(5+13)}{5!\,13!} = \frac{17! \cdot 18}{5!\,13!} = \frac{18!}{5!\,13!} =$ 8 568

e) $\frac{50!}{36!\,14!}$ f) $\frac{13!}{9!\,4!}$

g) $\frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!}$ h) $\frac{2n+3}{(n-2)!}$

i) $\frac{11!}{5!\,6!}$ j) $\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

k) $\frac{m!}{(k+1)!\,(m-k-1)!}$

l) $\frac{n-p+2}{p}$

17)

a) V = {5} b) V = {0, 1, 3}

c) V = {0, 1} d) V = ∅ e) V = {5}

f) V = {7} observe que n = 0 não satisfaz às condições de existência da equação

g) V = {81} h) V = {5}

18)

a) V = {(1, –1)}

b) V = {(0, 2), (1, 2)}

19)

a) 2° membro = $(3p-1)!\,(9p^2+3p) = (3p-1)!\,3p \cdot (3p+1) = (3p+1)! =$ 1° membro e, portanto, está demonstrada esta identidade.

b) demonstração c) demonstração

d) está identidade é conhecida com o nome de relação de Fermat

e) 1° membro =

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} =$$

$$= \frac{(p+1).n! + (n-p).n!}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$\frac{n! \cdot [p+1+n-p]}{(p+1))!(n-p)!} = \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = 2^\circ \text{ membro.}$$

está identidade é conhecida com o nome de relação de Stifel

f) 1° membro = $2(p+3)! - (p+2)!\,(p+2) = (p+2)!\,[2(p+3) - (p+2)] =$
$= (p+2)! \cdot (p+4) =$
$= (p+2)!\,(p+3) + 1 =$
$= (p+2)!\,[(p+3)+1] \cdot (p+2)! =$
$= (p+2)! + (p+3)! =$ 2° membro.

20)

De acordo com o exercício 19 (b), temos:

1° membro = $(n+1)! - n! = n! \cdot [(n+1)-1] = n!\,n =$ 2° membro, $\forall\, n \in \mathbf{N}$

Assim sendo, atribuindo valores naturais ao **n** e, a seguir, somando as igualdades membro a membro, temos:

$$(n+1)! - n! = n!n$$

e, portanto, $S = (p+1)! - 1$

21) $S = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$

22)
a) 10 b) 70 c) 6 d) 1 e) 12
f) 1 g) 35 h) 126 i) 252

23)
a) 1; 1; 1; 1; 1. Conclusão: binomial da forma $\binom{n}{0} = 1, (\forall n \in N)$

b) 8; 2; 23; n. Conclusão: binomial da forma $\binom{n}{1} = n, (\forall n \in N^*)$

c) 1; 1; 1; 1. Conclusão: binomial da forma $\binom{n}{n} = 1, (\forall n \in N)$

d) 7; 10; 35; n. Conclusão: binomial da forma $\binom{n}{n-1} = n, (\forall n \in N^*)$

e) $\binom{8}{2} = \binom{8}{6} = 28$

f) $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$

g) $\binom{10}{1} = \binom{10}{9} = 10$

h) $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = 105$

i) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Conclusão: dois números binomiais com mesmo numerador e que têm denominadores cuja soma é igual ao numerador, têm valores iguais: eles são chamados de coeficiente binomiais complementares.

24)
a) $V = \{13\}$ b) $V = \{12\}$
c) $V = \{4, 9\}$ d) $V = \{10\}$
e) $V = \{29\}$

25)
a) $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$

b) $\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$

c) $\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \binom{6}{2}$

d) $\binom{6}{6}, \binom{7}{6}, \binom{8}{6}, \binom{9}{6}, \binom{10}{6}$

e) $\binom{3}{0}, \binom{4}{1}, \binom{5}{2}, \binom{6}{3}, \binom{7}{4}$

f) $\binom{5}{0}, \binom{6}{1}, \binom{7}{2}, \binom{8}{3}, \binom{9}{4}$

26)
a) $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$

b) $\binom{8}{4}, \binom{8}{5}, \binom{8}{7}, \binom{8}{8}$

c) $\binom{n}{p-2}, \binom{n}{p-1}, \binom{n}{p+1}, \binom{n}{p+2}$

d) $\binom{n-1}{p-1}, \binom{n-1}{p}, \binom{n-1}{p+2}, \binom{n-1}{p+3}$

e) $\binom{n-k+1}{p-4}, \binom{n-k+1}{p-3}, \binom{n-k+1}{p-1}, \binom{n-k+1}{p}$

27)
a) $\binom{5}{5}, \binom{6}{5}, \binom{8}{5}, \binom{9}{5}$

b) $\binom{6}{1}, \binom{7}{1}, \binom{9}{1}, \binom{10}{1}$

c) $\binom{n-2}{p}, \binom{n-1}{p}, \binom{n+1}{p}, \binom{n+2}{p}$

d) $\binom{n+k-2}{k}, \binom{n+k-1}{k}, \binom{n+k+1}{k}, \binom{n+k+2}{k}$

e) $\binom{n-5}{4}, \binom{n-4}{4}, \binom{n-2}{4}, \binom{n-1}{4}$

28)

a) $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} = 1 + 6 = 7 = \binom{7}{1}$

$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21 = \binom{7}{2}$

$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35 = \binom{7}{3}$

$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = 20 + 15 = 35 = \binom{7}{4}$

$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 15 + 6 = 21 = \binom{7}{5}$

$\binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 6 + 1 = 7 = \binom{7}{6}$

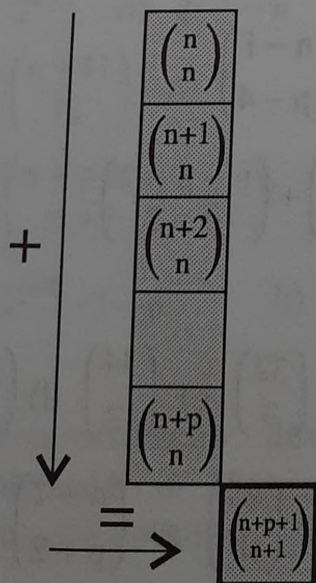
Propriedade: "Um termo qualquer mais o seguinte dá o de baixo: Esta propriedade é chamada de relação de Stifel e, como demonstraremos mais a frente, é valido para quaisquer dois termos consecutivos do triângulo de Pascal.

29)

a) $1 + 4 = 55 = \binom{5}{4}$

b) $1 + 4 + 10 = 15 = \binom{6}{4}$

c) $1 + 4 + 10 + 20 = 35 = \binom{7}{4}$

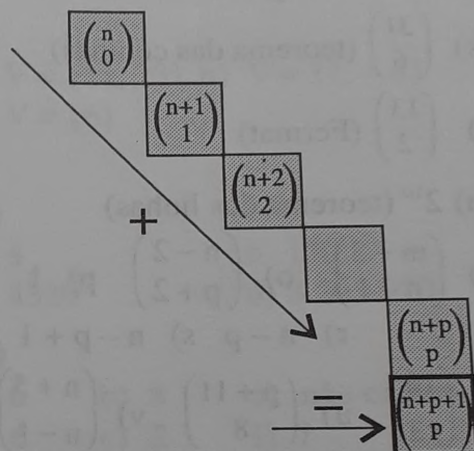
d) $1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70 = \binom{8}{4}$

Esta propriedade é chamada de **teorema das colunas**

30)

a) $1 + 5 = 6 = \binom{6}{1}$

b) $1 + 5 + 15 = 21 = \binom{7}{2}$

c) $1 + 5 + 15 + 35 = 56 = \binom{8}{3}$

d) $1 + 5 + 15 + 35 + 70 = 126 = \binom{9}{4}$

Esta propriedade é chamada de **teorema das diagonais**

31)

a) $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1$

b) $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 4 = 2^2$

c) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$

d) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16 = 2^4$

e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

Esta propriedade é chamada de **teorema das linhas.**

32)

a) 1 (propriedade P.3)
b) 7 (propriedade P.2)
c) 1 (propriedade P.1)
d) 15 (propriedade P.4)

e) $\binom{13}{5}$ (relação de Stifel) f) $\binom{38}{13}$

g) $\binom{16}{9}$ (teorema das diagonais)

h) $\binom{10}{5}$ (relação de Fermat)

i) 42 j) 1

k) $\binom{31}{6}$ (teorema das colunas)

l) $\binom{13}{2}$ (Fermat)

m) 2^{10} (teorema das linhas)

n) $\binom{m+3}{p-1}$ o) $\binom{n-2}{p+2}$ p) 1

q) 1 r) $n-p$ s) $n-p+1$

t) $\binom{16}{13}$ u) $\binom{p+11}{8}$ v) $\binom{n+5}{n-1}$

w) 2^{n-p}

33)

a) $\{4, 8\}$, pois $\binom{12}{4} = \binom{12}{4}$ e $\binom{12}{4} = \binom{12}{8}$ por que são binomiais complementares.

b) $V = \{13, 18\}$

c) $V = \{3\}$. Note que $x = \frac{4}{3}$ não serve porque não satisfaz às condições de existência dos binomiais.

d) $V = \{0, 2\}$ e) $V = \{-2, 2\}$

34)

a) $x = \binom{12}{9}$

b) Cuidado! Está faltando o coeficiente $\binom{10}{10}$ para que possamos aplicar o teorema das colunas. Assim sendo, temos:

$$x = \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \ldots + \binom{20}{10}$$

$$x + \binom{10}{10} = \binom{10}{10} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \ldots + \binom{20}{10}$$

$$x + \binom{10}{10} = \binom{21}{11} \Rightarrow x = \binom{21}{11} - \binom{10}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \binom{21}{11} - 1$$ que é a resposta.

c) $\binom{17}{9}$

d) $\binom{21}{17} - \binom{4}{1} - \binom{3}{0} = \binom{21}{17} - 5$

e) $2^6 = 64$

f) $2^{13} - \binom{13}{0} - \binom{13}{13} = 2^{13} - 2$

g) $\binom{15}{5}$

35)

b) $\binom{41}{37} + \binom{41}{36}$ c) $\binom{5}{1} + \binom{5}{0}$

d) $\binom{16}{8} + \binom{16}{7}$ e) $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

f) $\binom{n-3}{p+2} + \binom{n-3}{p+1}$

g) $\binom{n-1}{p-3} + \binom{n-1}{p-4}$

h) $\binom{n-p-2}{p-2} + \binom{n-p-2}{p-3}$

36)

a) $\binom{18}{6}$ b) $\binom{32}{3}$ c) $\binom{44}{12}$ d) $\binom{18}{5}$

e) $-\binom{21}{7}$ f) $-\binom{25}{14}$ g) $\binom{n+2}{p+2}$

h) $\binom{n}{p-1}$ i) $\binom{n+2}{p-1}$ j) $\binom{n-4}{p}$

37)

a) $x = \binom{13}{6}$ b) $x = \frac{15}{11}$ c) $x = \frac{8}{9}$

d) $x = \frac{11}{23}$ e) $x = \binom{12}{6}$ f) $x = \frac{7}{4}$

38)

$\binom{9}{0} = 1$

$\binom{9}{1} = \binom{9}{0} \cdot \frac{9-0}{0+1} = 1 \cdot \frac{9}{1} = 9$

$\binom{9}{3} = \binom{9}{2} \cdot \frac{9-2}{2+1} = 36 \cdot \frac{7}{3} = 84$

$\binom{9}{4} = \binom{9}{3} \cdot \frac{9-3}{3+1} = 84 \cdot \frac{6}{4} = 126$

$\binom{9}{5} = \binom{9}{4}, \binom{9}{6} = \binom{9}{3}, \binom{9}{7} =$

$\binom{9}{2}, \binom{9}{8} = \binom{9}{1}$ e $\binom{9}{9} = \binom{9}{0}$

portanto:
linha de ordem 9 = (1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1)

39)

a) $\binom{p+8}{p+1}$ b) $\binom{n+p+1}{p}$

c) 2^{k+2} d) $2^{n-1} - n$

e) $\binom{n+11}{12} - n$

f) $\binom{n+p+1}{n+1} - n - 2$

g) $2^{p-1} - 1 - p$ h) $\binom{n+1}{p}$

40)

a) demonstração: decomponha os binomiais do 1º membro usando a relação de Stifel.

b) demonstração: use o teorema das diagonias.

c) demonstração: use as relações de Stifel e Fermat.

41)

a) V={10, 22} b) V={7, 18}
c) V={3, 12} d) V={8, 3}
e) V={7} f) V={10}

42)

a) V = {4} b) V = {9} c) V = {3}
d) V = {10} e) V = {13}

43)

a) V = {11, 23} b) V = {1, – 4}
c) V = {6}

44)

a) 4 b) 150
c) 4320 d) 3.265.920

45)

a) 6 b) 8 c) não existe
d) 6 e) 2 f) 7 g) 1
h) 4

46)

a) 5 b) 2 c) 7 d) 8

47)

a) 2 ou 5 b) 4

48)

a) $\frac{7!}{4!}$ b) $\frac{13!}{9!}$ c) $\frac{23!}{20}$

d) $\frac{4 \cdot 11!}{7!}$ e) $\frac{13!}{8!}$ f) $\frac{21!}{4 \cdot 17!}$

g) $\frac{95!}{68!}$ h) $\frac{19!}{35!}$ i) $\frac{8 \cdot 19!}{25!}$

j) $\frac{(n+3)!}{n!}$ k) $\frac{(n-p+1)!}{(n-p-2)!}$

l) $\frac{(n-p+1)!}{(n-2p-1)!}$

m) $\frac{(n-k)!}{(n-k-2)!}$

49)

a) 90 b) $\frac{1}{210}$ c) 12

d) 2.450 e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{22}{117}$

g) 812 h) $\frac{286}{57}$

50)

a) $n-2$ b) n^2+3n+2

c) $\frac{1}{n^2-3n+2}$ d) $\frac{n}{n-1}$

e) $\frac{n^2-3n+2}{n^2+5n+6}$ f) $\frac{n^2-11n+30}{n^2+9n+20}$

51)

a) $\frac{41}{336}$ b) $\frac{2}{15}$ c) 30

d) $\frac{n}{n+1}$ e) n^2+n

f) $\frac{n^3-n+1}{n^3-2n+1}$

52)

a) $\frac{n+2}{(n+1)!}$ b) $\frac{-n}{(n+1)!}$

c) $\frac{n\cdot(n-1)}{(n-5)!}$

53)

a) 10 b) 6 c) 8

54)

a) {6} b) {5} c) {6, 10}

d) {5} e) {6} f) {6}

g) {4} h) {4} i) {3, 14}

55)

a) $2^7 \cdot 7!$ b) $\frac{2^7\cdot 10!}{3!}$ c) $\frac{13!}{2^6\cdot 6!}$

d) $\frac{17!}{2^8\cdot 8!}$ e) $\frac{n!}{(n-13)!}$

f) $\frac{(n+4)!}{(n-5)!}$

56)

a) $2^n\cdot n!$ b) $\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$

c) $2^{2n}\cdot(2n)!$ d) $\frac{(4n)!}{2^{2n}\cdot(2n)!}$

57)

a) $\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}$

b) $2^n\cdot(n!)\cdot[(2n+1)!]^2$

60)

a) {0} b) {3} c) {4}

d) {3} e) {5}

62) $\left\{\frac{2}{(n+2)!-(n+2)}\right\}$

63)

a) S = {6, 7, 8,...} b) S = {6, 7, 8}

c) $S=\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},...\right\}$

d) S = {8, 9, 10}

64)

a) 174 b) não c) não

66) n=23;

67)

a) 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7 e 1

b) 1, 1 c) 9, 9 d) 36, 36

e) 84, 84 f) 126, 126

68)

a) 1, 1 b) n, n

c) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6},\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

69)

a) $n\in N,\ n\geq 3$

b) $n \in N, n \geq 4$
c) $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

70)
$D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

71)
a) $\{7\}$ b) $\{10\}$ c) $\{9\}$
d) $\{x \in N | x \geq 3\}$

72)
a) $\{6\}$ b) $\{5\}$

73)
a) $\binom{9}{6}$ b) $\binom{15}{14}$ c) $\binom{17}{1}$
d) $\binom{30}{9}$ e) $\binom{33}{19}$ f) $\binom{n}{n}$
g) $\binom{n}{n-p}$ h) $\binom{n}{k}$
i) $\binom{n}{2n-p}$ j) $\binom{2n+4}{n+5}$

74)
a) $\{5, 8\}$ b) $\left\{\frac{7}{2}, 4\right\}$
c) $\{2, 15\}$ d) $\{3, 8\}$
e) $\{6, 7\}$ f) $\{-9, -6, 7, 8\}$

75)
a) $\binom{8}{5}$ b) $\binom{16}{3}$ c) $\binom{24}{13}$
d) $\binom{31}{11}$ e) $\binom{28}{10}$ f) $\binom{16}{10}$
g) $\binom{n+1}{n-3}$ h) $\binom{n-p+1}{p+1}$
i) $\binom{n+1}{n-5}$ j) $\binom{n-1}{p-1}$ k) $\binom{n-1}{p}$
l) $\binom{n-4}{n-7}$ m) $\binom{31}{12}$ n) $\binom{28}{9}$
o) $\binom{n-1}{n-8}$

76)
a) $\{6, 7\}$ b) $\{7, 11\}$
c) $\{8, 12\}$ d) $\{12, 20\}$

77)
a) $\{4\}$ b) $\{6\}$ c) $\{8\}$ d) $\{4\}$

78)
a) $\binom{20}{13}$ b) $\binom{10}{2}$ c) $\binom{19}{12}$
d) $\binom{32}{23}$ e) $\binom{31}{23}$ f) $\binom{m-2}{p-1}$

79)
a) 35 b) 35

80) 45

81)
a) m=2r b) m=17

82)
a) m=17, n=8 b) x=12, y=5
c) m=8, n=18 d) m=5, n=2

83) m=3, n=6

84) 9

86)
a) $\binom{n+3}{p+2}$ b) $\binom{n+3}{p+2}$
c) $\binom{n}{p}+\binom{n+1}{p+1}$ d) $\binom{n}{p}$

90)
a) $S = n \cdot 2^{n-1}$
b) $S = \binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$

92) $\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3}$

95)

a) $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$

b) $a^4 - 4a^3y + 6a^2y^2 - 4ay^3 + y^4$

c) $x^7 - 14x^6 + 84x^5 - 280x^4 + 560x^3 - 672x^2 + 448x - 128$

d) $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$, e) $x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 27x^3$

f) $x^4 + 4x + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^5} + \frac{1}{x^8}$

g) $-(x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 8xy^4 + 32y^5)$

96)

a) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b) $243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$

c) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$, d) $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$

e) $x^{12} + 6x^9 + 15x^6 + 20x^3 + 15 + 6x^{-3} + x^{-6}$;

97)

b) $\sum_{i=0}^{9} (-1)^i \binom{9}{i} a^{9-i} \cdot b^i$

c) $\sum_{I=0}^{16} \binom{16}{i} \cdot (5x)^{16-j} \cdot 6^i =$

$= \sum_{i=0}^{16} \binom{16}{i} 5^{16-i} \cdot 6^i \cdot x^{16-i}$

d) $\sum_{i=0}^{14} (-1)^i \binom{14}{i} \cdot (x^3)^{14-i} \cdot (x^{-3})^i =$

$\sum_{i=0}^{14} (-1)^i x^{42-6i}$

e) $\sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} a^{20-i} \cdot 1^i = \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} a^{20-i}$

f) $\sum_{i=0}^{11} (-1)^i \binom{11}{i} \cdot x^{11-i}$

g) $\sum_{i=0}^{15} (-1)^i \binom{15}{i} \cdot 1^{15-1} (x^2)^i =$

$\sum_{i=0}^{15} (-1)^i \binom{15}{i} x^{2i}$

h) $\sum_{i=0}^{18} (-1)^i \binom{18}{i} (x^{-2})^i = \sum_{i=0}^{18} (-1)^i \binom{18}{i} x^{-2i}$

i) $\sum_{i=0}^{30} (-1)^i \binom{30}{i} 2^{30-i} \cdot (6x^{-1}) =$

$= \sum_{i=0}^{30} (-1)^i \binom{30}{i} 2^{30} \cdot 3^i\, x^{-i}$

98)

b) $(x + 2)^{13}$ c) $(a - 3)^{16}$

d) $(-x + 1)^{20}$ e) $(x + 1)^8$

f) $(-1 + a)^{25}$ g) $(2 + 3)^n = 5^n$

h) $(5 - 4)^{200} = 1^{200} = 1$

i) $(3 - 3)^{12} = 0^{12} = 0$

j) $(6 + 1)^n = 7^n$

k) $(1 + 7)^{10} = 8^{10} = 2^{30}$

99)

b) $\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \binom{6}{i} x^{6-i} \cdot y^i$

c) $\sum_{i=0}^{3} (-1)^{3-i} \binom{3}{i} m^{3-i} \cdot n^i$

d) $\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a^{4-i} \cdot 2^i$

e) $\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} x^{5-i} \cdot (-1)^i$

f) $\sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} 7^{9-i} \cdot 2^i$

g) $\sum_{i=0}^{14}(-1)^i\binom{14}{i}6^{14-i}\cdot 6^i =$

$\sum_{i=0}^{14}(-1)^i\binom{14}{i}6^{14}$

h) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\binom{n}{i}2^{n-i}\cdot 3^i$

i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}\cdot 1^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$

100)

a) $(a+b)^5$ b) $(x-y)^6$

c) $(-m+n)^3$ d) $(a+2)^4$

e) $(x-1)^5$ f) $(7+2)^9 = 9^9 = 3^{18}$

g) $(6-6)^{14} = 0^{14} = 0$

h) $(-2+3)^n = 1^n = 1$

i) $(1+1)^n = 2^n$ (teorema da linha)

101)

b) $(x-1)^6 - x^6$ c) $(a+1)^9 - a^9 - 1$

d) $5^{17} - 3^{17}$ e) $1 - 9^{25} + 8^{25}$

f) $2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - 1 - n$

102)

b) $T_{p+1} = \binom{10}{p}x^{10-p}a^p$

c) $T_{p+1} = \binom{20}{p}(-1)^p\cdot x^{20-p}$

d) $T_{p+1} = \binom{9}{p}2^9\cdot(-3)^p\cdot x^p$

e) $T_{p+1} = \binom{6}{p}2^{6-p}\cdot 3^p\cdot x^{6-p}\cdot y^{2p-6}$

f) $T_{p+1} = \binom{m}{p}x^{m-2p}$

g) $T_{p+1} = \binom{12}{p}(-1)^p\cdot x^{6-\frac{7p}{2}}$

h) $T_{p+1} = \binom{17}{p}x^{\frac{51-p}{6}}$

103)

b) T_6

c) não tem apenas um termo central; eles são dois: T_3 e T_4

d) T_4 e) T_{50}

$$\overbrace{\underbrace{T_1 + T_2 + \ldots\ldots T_i}_{m\ \text{termos}} + T_c + \underbrace{T_j + \ldots + T_{98} + T_{99}}_{m\ \text{termos}}}^{n=98 \Rightarrow 99\ \text{termos}}$$

$m + 1 + m = 99$

$2m = 98 \Rightarrow m = 49 \Rightarrow T_i = T_{49} \Rightarrow$

$T_c = T_{50}$ (termo central)

f) quando **n** é par o termo central do desenvolvimento é o de ordem $\left(\frac{n}{2}+1\right)$

104)

b) T_2 e T_3 c) T_4 e T_5 d) T_5 e T_6

e) T_{24} e T_{25}

f) são os termos de ordens $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ e $\left(\frac{n+3}{2}\right)$

105)

b) $T_{11} = \binom{15}{10}$, $T_{16} = -x^{-15}$, $T_1 = x^{30}$

c) $T_5 = 1451520x^4$

d) $\begin{cases} T_6 = \binom{11}{5}\cdot 2^6\cdot 3^5\cdot\dfrac{x^6}{y} \\ T_7 = \binom{11}{6}\cdot 2^5\cdot 3^6\cdot x^5 y \end{cases}$

e) $T_3 = 66x^{-1}$ f) $T_{16} = 136x^6$

g) $T_{k+1} = \binom{10}{k}x^{10-k}a^k$

h) $T_k = \binom{13}{k-1} \cdot (-1)^{k-1} \cdot x^{14-k} \cdot y^{k-1}$

i) $T_{k-1} = \binom{18}{k-2} \cdot (-2)^{k-2}\, x^{20-k}$

j) $T_{k+3} = \binom{m}{k+2} (-1)^{k+2}\, x^{m-3k-6}$

107) $T_{16} = 136x^6$

108) $T_{11} = \binom{15}{10} x^0 = \binom{15}{10} = 3003$

109) 7º termo

110) 10º termo

112)

a) 5^{10} b) $4^6 = 2^{12}$ c) 2^n

d) 0 e) 6^{15} f) $2^{-10} \cdot 3^{-5}$

g) 10^8 h) 2^m (teorema de linha)

i) 0

113) n= 4

114) 17 termos racionais

115) $T_9 = 12870 \dfrac{a^8}{x^4}$

116) -252

117) 210

118) $3003a^{10}$

119) $\dfrac{455}{x^3}$

120) 4 e 7

121) $S_3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (S_1)^2$

122)

b) $S(n) = \dfrac{n(n+1)(4-n)}{3}$

c) $S(n) = \dfrac{n(8n^2+3n+1)}{6}$

d) $S(n) = \dfrac{-n(n+1)(n^2+n-4)}{4}$

f) $S(n) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

g) $S(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

h) $S(n) = \dfrac{n(4n^2+9n-1)}{3}$

123)

a) $a^7 - 14a^6x + 84a^5x^2 - 280a^4x^3 + 560a^3x^4 - 672a^2x^5 + 448ax^6 - 128x^7$

b) $\dfrac{x^6}{64} + \dfrac{3x^5}{8} + \dfrac{15x^4}{4} + 20x^3 + 60x^2 + 96x + 64$

c) $243x^5 + 405x^4y + 270x^3y^2 + 90x^2y^3 + 15xy^4 + y^5$

d) $x^7 + 7x^5 + 21x^3 + 35x + \dfrac{35}{x} + \dfrac{21}{x^3} + \dfrac{7}{x^5} + \dfrac{1}{x^7}$

e) $\dfrac{x^6}{729} - \dfrac{2x^5y^2}{27} + \dfrac{5x^4y^4}{3} - 20x^3y^6 + 135x^2y^8 - 486xy^{10} + 729y^{12}$

f) $10x^4 + 40x^2 + 32$

124) a) 1,159274 b) 1,340095 c) 1,368569

125) a) $4060a^{27}x^3$ b) $-680x^{31}$

c) $\dfrac{210}{x^6}$ d) $\dfrac{2300b^{22}}{x^{16}}$

e) $-983040x^8\sqrt{2x}$

126) a) 2^{12} b) 1 c) 2^{33}

127) 11520

128) −1760

129) −20

130) a) $T_6 = -252$

b) $T_8 = -1\,184\,040$

c) $T_7 = 2\,268$ d) $T_7 = \dfrac{28}{243}$

131) 165

132) $x = -1$ ou $x = 2$

133) $x = 2$

134) $x = -5$ ou $x = 2$

135) $x = 10$ ou $x = 0{,}0001$

136) $x = 2$

137) $x = 10$ ou $x = \dfrac{\sqrt{10}}{1000}$

138) $x = 0{,}1$ ou $x = 1000$

139) $x = 1000$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

140) $x=100$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{100}}$

141) $x = 10$ ou $x = \dfrac{\sqrt[5]{10^4}}{10}$

142) $x = 0$ ou $x = 2$

143) $x = 2$

144) $35x^5$

145) $x = 4$

146) $x = 1$

147) $x = 5\sqrt{5}$ ou $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

148) $n = 9$

149) 84

150) $n = 7$

151) $n = 7$ ou $n = 14$

152)

$1+\dfrac{1}{a}$ tem que ser divisor de $n+1$

Impossível ter 3 termos consecutivos iguais.

153) a) $T_6 = \dfrac{57\,344}{243}$

b) $T_9 = \dbinom{28}{8} \cdot 4^8 \cdot 9^{20}$

c) $T_6 = T_7 = \dbinom{15}{5} 3^5 \cdot 5^{10}$

154) $k = 64$

155)

$r = 6,\ n \geq 4$ ou $n = \dfrac{3r-2}{2}$, r é par.

156) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)2^{2m}\,x^m}{m!}$

157) $n = 15,\ T_{13} = 3\,640x^3$

158) $m = 15,\ T_7 = \dfrac{5005}{64}x^3$

160) a) $\dbinom{n+1}{m+1} - \dbinom{k}{m+1}$

b) $\dbinom{n+1}{m+1}$

161) $\dbinom{4}{4} + \dbinom{5}{4} + \dbinom{6}{4} + \ldots$

$+\dbinom{20}{4} = \dbinom{21}{5}$

162) 755

163) $T = \dbinom{36}{12} a^{12}; \alpha = 4$

164) $-45x^6$

165) 82 226

166) 3090

167)

a) Use as igualdades $\dbinom{n}{1} = n\dbinom{n-1}{0}$,

$2\dbinom{n}{2} = n\dbinom{n-1}{1}, 3\dbinom{n}{3} = n\dbinom{n-1}{2}, \ldots$

b) Note que S_1+S_2 onde

$S_1 = 1 + \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} + \ldots + \dbinom{n}{n}$ e

$$S_2 = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots$$

$$+ n\binom{n}{n}$$ é igual ao 1 membro.

c) Use

$$S_1 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots$$

$$+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$$ e

$$S_2 = -\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \ldots +$$

$$(-1)^n n\binom{n}{n} =$$

$$-n\left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + .\right.$$

$$\left. .. + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right] = 0$$

e faça $S_1 + S_2$.

d) Faça S_1 do item c menos a igualdade do item c.

e) Divida ambos os membros por $\binom{n}{p}$

Obtém-se no 1º membro uma expressão com termo geral

$$\frac{\binom{n-q}{p-q}\binom{n}{q}}{\binom{n}{p}}$$ que é $\binom{p}{q}$ donde:

$$\binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \ldots + \binom{p}{p} = 2^p$$

168)

a) Fazer $x = 1$ e $a = 2$ em $(x + a)^n$

b) Fazer $x = 1$ e $a = -3$ em $(x + a)^n$

c) Igualar os coeficientes de x^{2n} na identidade

$$(x-1)^{2n}(1-x)^{2n} = (1-x^2)^{2n}$$

170) Igualar os coeficientes de x^{a+b-p}

171)

Use a identidade

$$(1+x)^n(1-x)^n = (1-x^2)^n$$

172)

Em ambos os casos ambos os membros são $\binom{n+2}{3}$

173)

a) $S(n) = \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

b) $S(n) = n^2(2n^2 - 1)$

c) $S(n) = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)$

$(3n^2 + 3n - 1)$

d) $S(n) = \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$

e) $S(n) = \dfrac{2nx^n(x-1) - (x^n - 1)(x+1)}{(x-1)^2}$

174) $\frac{n}{24}(n^2 - 1)(3n - 2)$

175)

a) $n(2n+1)$ b) $n^2(4n+3)$

Capítulo 3

176) 6912

177) 144

178) $3^{13} = 1.594.323$ apostas.

179)
$3^2 = 9$ apostas. As apostas possíveis são: {(1, 1), (1, ½), (1, 2), (½, 1), (½, ½), (½, 2), (2, 1), (2, ½), (2, 2)}

180)
a) 720 b) 120 c) 24 d) 240
e) 480 f) 192 g) 288

181)
a) 5040
b) 1ª fase: escolher uma ordem para AMP, 2ª fase: escolher um ordem para (AMP), U, N, I, C. Portanto: $\alpha = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 720$
c) 120

182)
a) 343 b) 196

183)
a) 840 b) 360

184)
a) 2688 b) 1512 c) 1176

185)
a) 5832 b) 2592

186) 210

187) $7! = 5040$

188) 60

189)
a) $6! = 720$ b) $5!\,2! = 2040$
c) $720 - 240 = 480$

190) 60 triângulos

191) 50 retas

192) 480

193) 34º

194)
a) divisor $= 5^a \cdot 7^b$ onde a = 0, 1 ou 2 (1ª fase de escolha) b = 0,1 (2ª fase de escolha) $a = (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$
b) $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ c) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 90$
d) (a+1) (b+1) (c+1)

195) $\alpha = 3 \cdot 2^6 - 6 = 192 - 6 = 186$
Vamos supor que as cores sejam branco, preto e vermelho. Ao fazer a "árvore de possibilidades" é fácil verificar que, dentre os 192 resultados, são formadas 6 bandeiras contendo apenas duas cores, que são as seguintes:
(B, P, B, P, B, P, B)
(B, V, B, V, B, V, B)
(P, B, P, B, P, B, P)
(P, V, P, V, P, V, P)
(V, B, V, B, V, B, V)
(V, P, V, P, V, P, V) e que não satisfazem ao enunciado do exercício.
Resposta: há 186 bandeiras de três cores.

196) $3 \cdot 2^6 = 192$

197) 362.880

198) $P_{11} = 11!$

199) $A_{20,11}$

200)
a) $A_{9,5} = 15.120$ b) $4 \cdot A_{8,4} = 6.720$
c) $5 \cdot A_{8,4} = 8400$

201)
a) $A_{10,4} - A_{9,3} = 4.536$
b) $5 \cdot 8 \cdot A_{8,2} = 2.240$
c) $A_{9,3} + 4 \cdot 8 \cdot A_{8,2} = 2296$

202) 473

203) $A_{6,3} = 120$

204)
a) $A_{10,4} = 5040$ b) 10^4

205)
a) 3^{12}
b) Nenhuma, pois é impossível formar uma função f: A $\rightarrow$ B injetora se $n(A) > n(B)$.

206)
a) $4^4 = 256$ b) $256 - P_4 = 232$

207) $A_{8,3} = 336$

208)
a) $P_7 = 7! = 5040$ b) $P_6 = 6! = 720$
c) $P_4 = 4! = 24$ d) $3 \cdot P_6 = 2160$
e) $4 \cdot 3 \cdot P_5 = 1440$ f) $P_4 = 24$
g) $P_3 \cdot P_5 = 720$

209)
a) $P_2 \cdot P_9 = 725.760$
b) $P_3 \cdot P_8 = 241.920$
c) $2 \cdot P_9 = 725.760$
d) $2 \cdot P_8 = 80.640$
e) $A_{4,2} \cdot P_8 = 483.840$

210) 420º

211) 301º

212) 1554

213) $P_4 \cdot (1+2+5+7+8) \cdot (1+10+100+1000+10.000) = 24 \cdot 23 \cdot 11.111 = 6.133.272$

214) 216

215)
a) $6(n-2)$ b) $A_{n,3} = n(n-1)(n-2)$

216) 1.008

217) 576

218)
a) 3001 b) 1512 c) 1489

219)
a) $2 \cdot (P_6)^2 = 1.036.800$
b) $A_{12,6} \cdot P_6 = P_{12} = 12!$
c) $12 \cdot (P_5)^2 = 172.800$

220) $P_6 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2.880$

221) $A_{5,3} \cdot A_{6,3} \cdot A_{4,3} = 172.800$

222) 3.999.960

223) 36

224) 13.440

225) $2 \cdot A_{20,10}$

226) 144

227) 90º

228) 60

229) 12

230) 362.880

231) $C_{6,4} = 15$ comissões. Lembre-se que: $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{P_1, P_4, P_3, P_2\}$

232) $C_{5,2} = 10$ segmentos. Note que $\overline{AB} = \overline{BA}$

233)
a) 1ª fase (F_1) $\rightarrow$ escolher um ponto em r: $\alpha_1 = 5$
2ª fase (F_2) $\rightarrow$ escolher um ponto em s: $\alpha_2 = 6$
$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 5 \cdot 6 = 30$ segmentos
b) $F_1 \rightarrow$ escolher um ponto em r: $\alpha_1 = 5$
$F_2 \rightarrow$ escolher um par de pontos em s: $\alpha_2 = C_{6,2} = 15$
$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 5 \cdot 15 = 75$ triângulos.
c) 1º modo de resolver:
um ponto em r, dois em s $\rightarrow \beta_1 = 5 \cdot C_{6,2} = 75$
dois pontos em r, um em s $\rightarrow \beta_2 = C_{5,2} \cdot 6 = 60$ $\alpha = \beta_1 + \beta_2 = 135$ triângulos
2º modo: total de trios considerando os 11 pontos $= C_{11,3} = 165$
trios sobre r $= C_{5,3} = 10$

trios sobre s = $C_{6,3} = 20$

α = (total) – (o que não serve)

$\alpha = 165 - 10 - 20 = 135$ triângulos.

d) $\alpha = C_{5,2} \cdot C_{6,2} = 10 \cdot 15 = 150$ quadriláteros

234)

$F_1 \rightarrow$ escolher um engenheiro: $\alpha_1 = 3$

$F_2 \rightarrow$ escolher um trio de administradores: $\alpha_2 = C_{5,3} = 10$ trios

$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 3 \cdot C_{5,3} = 30$ comissões

235)

$\beta_1 = C_{6,3} \cdot C_{4,2} = 20 \cdot 6 = 120$

$\beta_2 = C_{6,4} \cdot C_{4,1} = 15 \cdot 4 = 60$

$\beta_3 = C_{6,5} \cdot C_{4,0} = C_{6,5} = 6$

$\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 186$ comissões.

236)

$F_1 \rightarrow$ escolher quais bolas ficam em A: $\alpha_1 = C_{10,3} = 120$ em A $\rightarrow \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$

$F_2 \rightarrow$ escolher, entre as que sobraram, quais ficam em B: $\alpha_2 = C_{7,2} = 21$

$F_3 \rightarrow \alpha_3 = C_{5,5} = 1$. Só há uma escolha, pois as cinco restantes ficam em C.

$\alpha = C_{10,3} \cdot C_{7,2} \cdot C_{5,5} = 120 \cdot 21 \cdot 1 = 2520$

237) $\alpha = C_{8,5} \cdot C_{3,3} = 56$

238)

$F_1 \rightarrow$ colocar as etiquetas B:

$\alpha_1 = C_{10,4} = 210$

$\{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{P_2, P_3, P_4, P_1\}$

$F_2 \rightarrow$ colocar as etiquetas A:

$\alpha_2 = C_{6,6} = 1$

$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = C_{10,4} \cdot C_{6,6} = 210$

239) $\alpha = C_{9,4} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2} = 1260$

240) $\alpha = C_{5,3} \cdot C_{2,2} = 10$ anagramas

241) $\alpha = C_{n,n_1} \cdot C_{(n-n_1),n_2} \cdot$

$C_{(n-n_1-n_2),n_3} \cdot C_{(n-n_1-n_2-n_3),n_4} =$

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2-n_3)!}{n_4!(n-n_1-n_2-n_3-n_4)!}$$

(Como $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \Rightarrow n - n_1 - n_2 - n_3 - n_4 = 0$)

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4! \cdot 0!} = $$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}$$

242) $C_{15,5} \cdot C_{11,5} = 2541$

243) $C_{4,3} \cdot C_{48,2} = 4512$

244) 2080

245) $C_{8,3} + C_{8,4} + C_{8,5} = 182$

246) $C_{12,7} \cdot C_{5,5} = 792$

247) a) 45 b) 120 c) 210

248) a) 57 b) 210

249)

a) $C_{10,2} - 10 = 35$

b) $C_{n,2-n} = \dfrac{n(n-3)}{2}$

250) 28

251) a) 120 b) 210

252) $C_{(p+q),p}$ ou $C_{(p+q),q}$

253) $C_{64,2} \cdot C_{62,2} = 3.812.256$

254) $C_{7,3} \cdot C_{4,3} = 140$

255) $n(n-3)$

256) 63

257) 20.910

258) $C_{4,2} \cdot C_{5,3} \cdot P_5 = 7.200$

259) 90

260) 281.016

261) 1.512

262) a) 720 b) n=4

263) 63

264)

a) 727 b) – 921 c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{10}{3}$

265)

a) x = 1 b) x = 3 c) x = 5
d) não existe x

266)

a) {20} b) {6} c) {9,4}
d) {15,2} e) {15}

267) n = 8 e k = 4

268) m = 5 e p = 3

269) $A_{m,3} = 504$

270) (x, y) = (6, 3)

271) 15

272) 10.000

273) 20

274) 8

275) 9

276) 48

277) 25; 20

278) 480; 437

279) 1024, 4032

280) 768

281) 1080

282) 30

283) 147

284) maçã pois $11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$

285) 480; 22

286) 28.561, 17.160

287) 169

288) $C_{32,16} \cdot C_{4,2}$

289) 30

290) 729

291) 63

292) 60, 24

293) (n – 2)(n – 1)!

294)

a) $C_{52,10} - C_{48,10}$ b) $C_{4,1} \cdot C_{48,9}$
c) $C_{52,10} - C_{48,10} - 4\,C_{48,9}$
d) $C_{4,2} \cdot C_{48,8}$

295) 3^m

296) 2^{32}

297) 43.200

298) 3.024

299) 2.598.960

300) 10

301) 1.260

302) 6.720

303) 27.405, 657.720

304) 5.040

305)

a) $C_{21,12}$ b) $C_{17,8}$ c) $C_{10,8}$

306) 371

307) 125

308) $\frac{m \cdot n(m-1)(n-1)}{4}$

309) $\frac{m \cdot n(m-1)(n-1)}{4}$

310) $C_{3,1} \cdot C_{6,2} \cdot C_{60,20}$

311) 17.417.400

312) 315

313) 32.767

314) 330

315) $\frac{24!}{4!}$

316) $\frac{8!}{3!} = 6.720$

317) $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 = 519.156$

318) $C_{17,12} - C_{15,10} = 3.185$

319) 172.800

320) 267.148

321) a) 3 b) 116

322) $304 \cdot 13^4$

323) 9.129.120

324) 7

325) 280

326) 450.000; 499.999

327) 55; 340

328) 144

329) 60

330) a) 84 b) 30

331) 54

332) a) 23.160 b) 5.460

333)
a) 66.660 b) 33.330
c) 11.110 d) 16.665

334) 2.599.980

335) a) 126 b) 1.092 c) 728

336) 17.760

337)
a) 3.999.960 b) 839.991.600

338) 12

339) 281.250

340) $9 \cdot 9!$

341) a) 686 b) 228

342)
a) 271 b) 27 c) 181
d) 9 e) 36 f) 54

343) 597.871

344) a) 102 b) 255

345) 4.020

346) 416

347) a) 864 b) 2.220

348) a) 88.080 b) 20.040

349) 100

350) 2.030

351) a) 1 b) 40 c) 190

352)
a) 66 b) 66 c) 264
d) 220 e) 495 f) 792

353)
a) 120 b) 65 c) 441 d) 756

354)
a) 153 b) 110 c) 751
d) 2250 e) 3885 f) 3150

355) $3 \cdot C_{12,4} = 1485$

356) 3.006

357)

a) O losaedro tem 20 faces triangulares, 12 vértices e 30 arestas. Então: $d = C_{12,2} - 30 = 36$

b) O dodecaedro tem 12 fases pentagonais, 20 vértices e 30 arestas. Então: $d = C_{20,2} - 30 - 12(5) = 100$

358) 20

359) 20

360) 220.

Capítulo 4

361)

a) E = {(Ca, Ca, Ca), (Ca, Ca, Co), (Ca, Co, Ca), (Co, Ca, Ca), (Ca, Co, Co), (Co, Ca, Co), (Co, Co, Ca), (Co, Co, Co)}

b) E = {1, 2, 3, 4}

c) E = {(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)}

d) E = {(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (M, F, F), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)}

e) E = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

f) E = {(P, B), (P, V), (P, P), (B, P), (B, V), (B, B), (V, B), (V, P), (V, V)}

362)

a) $n(E) = 6 \cdot 6 = 36$ pares ordenados.

b) $n(E) = C_{7,3} = 35$ trios.

c) $n(E) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ quintetos ordenados.

d) $n(E) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ trios ordenados.

e) $n(E) = 2 \cdot 6 = 12$ pares ordenados.

f) $n(E) = 4$ trios ordenados (sugestão: fazer uma árvore de possibilidades)

g) $n(E) = C_{12,2} = 66$ duplas.

363)

a) A = {1, 3, 5, 7}

b) B = {2, 3, 5, 7}

c) C = {3, 5, 7}

d) D = {1, 2, 3, 5, 7}

e) $F = \overline{B} = E - B = \{1, 4, 6\}$

f) $G = \{x \in E \mid x$ é irracional$\} = \varnothing$ (evento impossível)

g) $H = \{x \in E \mid x$ é inteiro $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = E$ (evento certo)

364)

a) $P(A) = \dfrac{4}{7}$ b) $P(B) = \dfrac{9}{14}$

c) $P(C) = \dfrac{1}{2}$ d) $P(D) = \dfrac{5}{7}$

e) $P(F) = \dfrac{5}{14} = 1 - P(B) = P(\overline{B})$

f) $P(G) = \varnothing$ (evento impossível)

g) $P(H) = 1$ (evento certo)

365)

a) $n(E) = 6 \cdot 6 = 36$ pares ordenados,

b) Seja $x \in \mathbf{R}_*$ a probabilidade de cada evento simples já que todas essas probabilidades são iguais. Assim sendo, temos: $x + x + x + \ldots + x = 1 \Rightarrow$

$36x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{36}$ é a probabilidade de cada evento simples.

c) {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}

(5 casos) . $\dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36}$

d) $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{1}{36}$

f) 0 (evento impossível)

g) $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

h) $\dfrac{36}{36} = 1 = 100\%$ (evento certo)

i) $\dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

366)

$p_1 = x \in R_+ \Rightarrow p_2 = 2x$

$p_3 = 3x$, $p_4 = 4x$, $p_5 = 5x$ e $p_6 = 6x$.

Por definição, temos: $x + 2x + 3x +$

$4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{21}$.

Temos, então: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

$A = \{x \in E \mid x$ é número não primo$\}$ $= \{1, 4, 6\} \Rightarrow$

$$P(A) = \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21}$$

Resposta: $P(A) = \frac{11}{21}$

367) C $\left(x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2x = 1\right)$

368)

$P\ (PAR) = \frac{7}{12}$ e $P\ (ÍMPAR) = \frac{5}{12}$, portanto, $P\ (PAR) > P\ (ÍMPAR)$

369)

a) $n(A)=10$ b) $n(B)=12$

c) $n(A \cap B) = 4$ d) $n(A \cup B) = 18$

e) $n(\overline{A}) = 10$ f) $n(\overline{B}) = 8$

g) $n(E) = 20$

h) $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$

i) $P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

j) $P(A \cap B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

k) $P(A \cup B) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

l) $P\ (A) + P\ (B) -$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{9}{10} =$

$P(A \cup B)$

m) $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$ n) $P(\overline{B}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

o) $1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = P(B)$

370)

a) Se A e B forem mutuamente exclusivos então teremos: $A \cap B = \varnothing$ e $P(A \cap B) = 0$.

Do enunciado e das propriedades, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap B) = \frac{2}{15} \neq 0$

e, portanto, A e B não são mutuamente exclusivos.

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

c) $P[E - (A \cup B)] = P(\overline{A \cup B}) =$

$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

371)

a) $P(4) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b) $P(6) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

c) $P(4 \text{ e } 6) = P(12) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$, pois mmc (4, 6) = 12

d) $P(4 \text{ ou } 6) = P(4) + P(6)$

$-P(12) = \frac{33}{100}$

372) $P(\overline{A \cup B \cup C}) = 15\%$

373)

a) $\overline{A} \to$ obter resultado ímpar

b) $\overline{A} \to$ obter menos que 2 ases

c) $\overline{A} \to$ obter pelo menos uma vez cara

d) $\overline{A} \to$ obter famílias com nenhuma menina ou obter famílias com 6 meninos.

e) $\overline{A} \to$ obter um par de números cujo produto termina em zero (algarismo das unidades igual a zero)

f) $\overline{A} \to$ obter 3 bolas de modo que ocorra pelo menos uma repetição de cores.

374) $\frac{1}{36}$

375) $\frac{19}{400}$

376) $\frac{C_{4,3} \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}}$

377) $\frac{13}{14} = 1 - P$ (4 bolas pretas)

378)

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

379) $\frac{1}{4}$

380) $\frac{1}{9}$

381) E

382) B

383) B

384)

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) 0

385) B

386)

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{3}{10}$

387) D

388) $\frac{2}{5}$

389) $\frac{3}{8}$

390)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$

391)

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$

392)

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{16}$

393) 73%

394) C

395) C

396) E

397) C

398) A

399)

a) ímpar b) $\frac{2}{25}$

400) C

401) B

402)

$P = \frac{n+2}{2(n+1)}$, para n par ou $P = \frac{n-1}{2n}$ para n ímpar.

403) D

404)

a) $\frac{n!(3n+1)!}{(4n)!}$ b) $\frac{1}{(n!)^4}$

405) D

406) E $\left(\text{Resp.} \frac{4}{9}\right)$

407) D

408) B

409) B

410) C

411) D

412) E

413) 3%

414)
a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{7}{9}$

415)
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{24}$
d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{23}{24}$

416)
a) $\frac{35}{132}$ b) $\frac{7}{264}$
c) $\frac{7}{264}$ d) $\frac{257}{264}$

417) $\frac{7}{15}$

418)
a) $\frac{33}{100}$ b) não c) não

419) $\frac{22}{25} = 88\%$

420) $\frac{17}{36}$

421)
a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{1}{3}$

422) $n \geq 3{,}5 \Rightarrow n_{mín} = 4$

423) A

424) C

425) B

426) C

427) E

428) C

429) D

430) D

431) E

432) C

433) $\frac{30}{91}$

434) E

435) D

436) $\frac{2}{9}$

437)
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{36}$ c) $\frac{6}{11}$

438) D

439) $\frac{3}{8}$

440)
a) $\frac{130}{203}$ b) $\frac{65}{203}$

441)
a) A = {(M, N, F)}, (M, F, M), (F, M, M), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F)}
B = {(M, F, F), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)}

b) $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ e $P(A).P(B) =$

$\frac{6}{8}.\frac{4}{8} = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

442)
a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{6}$

443)
a) sim b) não

444) B

445) C

446) 40 moedas pois quando n cresce, a probabilidade diminui.

447) A

448) B

449) D

450)

a) $p_1 = \frac{7}{12}$ b) $p_1 = \frac{3}{8}$

c) $p_1 = \frac{3}{5}$ d) $p_1 = \frac{1}{5}$

451)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 0 e) 1

f) $\frac{2}{3}$ g) $\frac{5}{6}$ h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{1}{6}$

452)

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{18}$ d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{13}{36}$ g) $\frac{1}{9}$

453)

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$

454)

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$

455)

a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{11}{32}$ c) $\frac{1}{64}$

456)

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{2}$

457)

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{25}{36}$ e) $\frac{1}{4}$

458)

a) $\frac{15}{16}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{1}{4}$

459)

a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{2}{3}$

460)

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{54}$ c) $\frac{5}{27}$ d) $\frac{1}{216}$

461)

a) $\frac{63}{512}$ b) $\frac{65}{1024}$

c) $\frac{1}{1024}$ d) $\frac{1}{2048}$

462)

a) $P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{1}{10},$
$P(C) = \frac{9}{20}, P(D) = \frac{3}{20}$

b) $\frac{1}{4}$

463)

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{13}$ c) $\frac{3}{52}$

464)

a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{13}{102}$

465)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{19}{20}$ e) $\frac{1}{20}$ f)) $\frac{1}{2}$

466) $\frac{16}{35}$

467) $\frac{1}{14}$

468) $\frac{23}{462}$

469)

a) $\frac{2}{91}$ b) $\frac{24}{91}$ c) $\frac{67}{91}$

470)

a) $\frac{7}{32}$ b) $\frac{1}{1240}$ c) $\frac{3}{620}$

d) $\frac{7}{62}$ e) $\frac{12}{31}$ f) $\frac{2}{155}$ g) $\frac{16}{155}$

471)

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

472)

a) $\frac{15}{64}$ b) $\frac{3}{32}$ c) $\frac{1}{64}$

d) $\frac{21}{32}$ e) $\frac{11}{32}$ f) $\frac{1}{64}$

473)

a) 580 b) $\frac{18}{29}$ c) $\frac{14}{29}$ d) $\frac{4}{29}$ e) $\frac{1}{29}$

474)

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{8}$

475)

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{10}$

476)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{3}$

477) $\frac{22}{55}$

478) $\frac{7}{12}$

479)

a) $\frac{1}{7!}$ b) $\frac{1}{7!}$

480)

a) $\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{1}{7}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{2}{7},$

b) $\frac{20}{21}$

481) $\frac{14}{95}$

482)

a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{33}$

483) $\frac{1}{4}$

484)

a) 20% b) 33,33%

c) 50% d) 73,4%

485) 99,891%

486) $\frac{4}{15}$

487)

a) $\frac{49}{99}$ b) $\frac{49}{99}$ c) $\frac{1}{2}$

488) $\frac{780}{6^5}$

489) $\frac{1}{6}$

490) $\frac{197}{200}$

491)

a) $\frac{1}{15}, \frac{8}{15}$ b) $\frac{1}{143}, \frac{32}{143}, \frac{80}{143}$ e $\frac{30}{143}$

492)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{26}$ d) $\frac{1}{39}$

493) $\frac{2}{3}$

494) $\frac{22}{703}$

495) $\frac{9}{19}$

496)

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{5}$

497) $\frac{1}{8}$

498) $\frac{3}{11}$

499) $\frac{2}{5}$

500) $\frac{2C_{13,5}}{C_{26,5}}$

501) $\frac{2}{5}$

502) $\frac{4}{15}$

503)

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

504)

a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{3}{8.8!}$

505) 21,7%

506) 0,51

507) $\frac{11}{15}$

508) $\frac{7}{24}$

509) $\frac{2.10!10!}{20!}$

510)

a) $\frac{127}{198}$ b) $\frac{72}{127}$

511)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}$

512)

a) $\frac{91}{132}$ b) $\frac{64}{73}$

A – TESTES

FATORIAL, NÚMEROS BINOMINAIS, BINÔMIO DE NEWTON

V1 - D
V2 - E
V3 - D
V4 - E
V5 - D
V6 - E
V7 - D
V8 - D
V9 - C
V10 - C
V11 - B
V12 - C
V13 - A
V14 - A
V15 - D
V16 - E
V17 - B
V18 - C
V19 - A
V20- C
V21 - C
V22 - A
V23 - A
V24 - E
V25 - B
V26 - C
V27 - C
V28 - B
V29 - B
V30 - A
V31 - B
V32 - B
V33 - B
V34 - D
V35 - A
V36 - B
V37 - B
V38 - B

V39 - E
V40 - A
V41 - E
V42 - D
V43 - C
V44 - C
V45 - A
V46 - E
V47 - E
V48 - B
V49 - D
V50 - B
V51 - D
V52 - A
V53 - B
V54 - B
V55 - B
V56 - D
V57 - A
V58 - C
V59 - B
V60 - B
V61 - A
V62 - E
V63 - A
V64 - B
V65 - C
V66- C
V67 - C
V68 - A
V69 - C
V70 - C
V71 - B
V72 - E
V73 - B
V74 - A
V75 - A
V76 - C
V77 - A
V78 - B
V79 - D
V80 - D
V81- D
V82- C
V83- C
V84 - E
V85 - C
V86 - B
V87 - C
V88 - 5005
V89 - C
V90 - C
V91 - C
V92 - E
V93 - B

ANÁLISE COMBINATÓRIA

V94 - A
V95 - C
V96 - C
V97 - C
V98 - D
V99 - D
V100 - C
V101 - C
V102 - B
V103 - E
V104 - C
V105 - A
V106 - E
V107 - D
V108 - A
V109- A
V110 - A
V111- C
V112 - C
V113 - C
V114 - D
V115 - B
V116- E
V117 - C
V118 - D
V119 - C
V120 - E
V121 - B

V122 - D
V123 - C
V124 - A
V125 - D
V126 - D
V127 - B
V128 - D
V129 - C
V130 - A
V131 - D
V132 - C
V133 - A
V134 - C
V135 - B
V136 - C
V137 - C
V138 - D
V139 - B
V140- E
V141 - B
V142 - D
V143 - D
V144 - B
V145 - E
V146 - D
V147 - A
V148 - D
V149 - A
V150 - E
V151 - B
V152 - B
V153 - C
V154 - C
V155 - D
V156 - D
V157 - E
V158 - A
V159 - B
V160 - E
V161 - B
V162 - E
V163 - D
V164 - A
V165 - B
V166 - A
V167 - A
V168 - C
V169 - A
V170 - D
V171 - D
V172 - E
V173 - B
V174 - C
V175 - B
V176 - E
V177 - A
V178 - D
V179 - D
V180 - A
V181- C
V182 - C
V183 - E
V184 - D
V185 - A
V186 - B
V187 - D
V188 - C
V189 - D
V190 - B
V191 - E
V192 - E
V193 - D
V194 - A
V195 - A
V196- E
V197 - E

PROBABILIDADE

V198 - C
V199 - B
V200 - E
V201 - B
V202 - A
V203 - B

V204 - C
V205 - A
V206 - B
V207 - D
V208 - 1º - B 2º - C
V209 - E
V210 - A
V211 - D
V212 - B
V213- D
V214 - D
V215 - C
V216 - D
V217 - E
V218 - C
V219 - E
V220- D
V221 - A
V222 - A
V223 - a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$
V224 - A
V225 - C
V226 - E
V227 - C
V228 - D
V229- D
V230 - E
V231 - C
V232 - A
V233 - C
V234 - A
V235 - A
V236 - C
V237 - A
V238 - D
V239- B
V240- C
V241- C
V242 - A
V243 - D
V244- E
V245 - D
V246 - B

B – Questões Discursivas

V247 - demonstração
V248 - $\frac{pq(p-1)(q-1)}{4}$
V249 - demonstração
V250 - demonstração
V251 - 2080
V252 - 140
V253 - 2
V254 - 1 e 3
V255 - 210
V256 - 36228800 e 5040
V257 - demonstração
V258 - 140
V259 - $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
V260 - 73%
V261 - $k = 2^{n+1}$
V262 - 90º lugar
V263 - a) $k = -10$, $n = 5$ b) zero
V264 - $\frac{2}{9}$
V265 - a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{36}$ c) $\frac{6}{11}$
V266 - $2^n \dotplus \frac{n^2 \therefore n \therefore 2}{2}$
V267 - $\frac{3}{8}$
V268 - a) 680 b) $2^{17} \dotplus 154$
V269 - a) $\frac{130}{203}$ b) $\frac{65}{203}$
V270 - a) 10 b) 7
V271 - 1440
V272 - a) 0,08 b) 0,25
V273 - 161.280
V274 - a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{5}$

V276 - 10

V277 - a) {A, B, B, C, C, C, }
b) 3.780

V278 - a) ímpar, por ter um nº maior
b) $\frac{2}{25}$

V279 - Problema sem solução. Os dados são incompatíveis.

V280 - Problema sujeito a varias interpretações. Uma delas: se o nº de vagas de cada lista é igual ao nº de vagas restantes, a resposta é $\frac{7}{70-x}$ onde $0 \le x \le 63$ é o nº de candidatos que efetuaram a matrícula.

V281 - 8.000.000

V282 - $\frac{n+2}{2n+2}$, se n é par, e $\frac{n-1}{2n}$, se n é ímpar

V283 - demonstração

V284- 2030

V285 - a) sim b) não

V286 - 150

V287 - $\frac{1}{36}$

V288 - a) 84 b) 1365

V289 - $\frac{9}{245}$

V290 - x = 1 ou x = 2

V291 - demonstração

V292 - $C_{64,2} \cdot C_{62,2} = 3.812.256$

V293 - 63

V294 - n (n–3)

V295 - D

V296 - $\frac{607}{6000} \cong 10{,}12\%$

V297 - a) 120 resultados possíveis
b) $\frac{5}{108}$

V298 - E

V299 - a) 15 b) $\frac{5}{8}$
c) n = 14 e p = 4

V300 - a) Devem ser colocadas 16 bolas azuis nessa urna.
b) x = 1 ou x = 9

Bibliografia

1) *Antar Neto, Aref e outros - Noções de Matemática; Editora Moderna; 1979.*

2) *Antonov, N. e outros - Problems In Elementary Mathematics For Home Study; Mir Publishers; 1982.*

3) *Apostol, Tom M. - Calculus; Editorial Reverté; 1973.*

4) *Bachx, Arago de Carvalho e outros – Prelúdio à Análise Combinatória; Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1975*

5) *Bogomolov, N.V. - Mathematics For Technical Schools; Mir Publishers; 1986*

6) *Cattony, Carlos – Análise Combinatória e Binômio de Newton – Editora Nobel*

7) *Dorofeev, G e Outros - Elementary Mathematics, Selected Topics And Problem Solving; Mir Publishers; 1973*

8) *Guelli, Cid A. e outros - Coleção Matemática Moderna; Editora Moderna*

9) *Gusev, V.A. e Mordkovich, A.G. - Mathematics For Those Entering Technical Schools; Mir Publishers; 1986.*

10) *Iezzi, Gelson e outros - Fundamentos de Matemática Elementar; Atual Editora; 1985.*

11) *Krechmar, V.A. - A Problem Book In Algebra; Mir Publishers; 1978.*

12) *Lipschutz, Seymour – Probabilidade; Editora McGraw-Hill do Brasil, 1974.*

13) *Litvinenko, V. e Mordkovich, A. - Solving Problems In Algebra And Trigonometry; Mir Publishers, 1987.*

14) *Machado, Antonio dos Santos - Matemática, Temas e Metas; Atual Editora; 1986.*

15) *Milies, C.P. e Coelho, S.P. - Números, uma Introdução À Matemática; (2ª Edição Preliminar), 1982.*

16) *Pitombeira de Carvalho, João Bosco e outros – Análise Combinatória e Probabilidade – Sociedade Brasileira de Matemática*

17) *Schons, N. J. – Exercices D'Algèbre, La Procure, Bruxeles*

18) *Spivak, Michael - Cálculo Infinitesimal; Editorial Reverté; 1970.*

19) *Trotta, Fernando e outros - Matemática Por Assunto; Editora Scipione.*

20) *Tulaikov, A.N. e outros - Problemas de Matemáticas Elementales, Editorial Mir; 1972.*

21) *Vilenkin. N. – De Cuantas Formas? Combinatória – Editorial MIR – Moscou – 1972.*

22) *Zaitsev, V.V. e outros - Elementary Mathematics, A. Review Course; Mir Publishers, 1978.*

IMPRESSÃO E ACABAMENTO